In una funzione $y = f(x)$, x è detta **variabile indipendente**, mentre y è detta **variabile dipendente**.
Una funzione può essere anche indicata con un'espressione del tipo $f(x; y) = 0$, detta **forma implicita**, mentre $y = f(x)$ è detta **forma esplicita** rispetto alla variabile y. Per esempio, la funzione $3x + 2y - 6 = 0$ è la forma implicita di $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

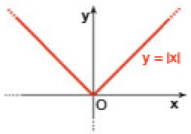
Di una funzione f possiamo disegnare il **grafico** nel piano cartesiano, cioè l'insieme dei punti $P(x; y)$ tali che y è immagine di x mediante f, ossia l'insieme dei punti $P(x; f(x))$. Del grafico possiamo cercare le **intersezioni con gli assi**, che si determinano mettendo a sistema l'equazione della funzione con $y = 0$ (equazione dell'asse x) o con $x = 0$ (equazione dell'asse y).

Esistono funzioni, dette **funzioni definite a tratti**, date da espressioni analitiche diverse a seconda dei valori attribuiti alla variabile indipendente.

ESEMPIO

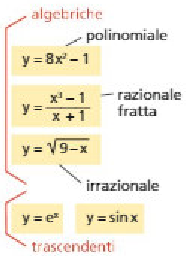
Funzione valore assoluto:

$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$



TEORIA

Classificazione delle funzioni



La funzione è **algebrica** se l'espressione analitica $y = f(x)$ che la descrive contiene solo, per la variabile x, operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza o estrazione di radice. Una funzione algebrica è:

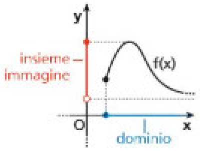
- **razionale intera** o **polinomiale** se è espressa mediante un polinomio; in particolare se il polinomio è di primo grado rispetto alla variabile x, la funzione è **lineare**, se il polinomio in x è di secondo grado, la funzione è **quadratica**;
- **razionale fratta** se è espressa mediante quozienti di polinomi;
- **irrazionale** se la variabile indipendente x compare sotto il segno di radice.

Se una funzione $y = f(x)$ non è algebrica, si dice **trascendente**.

Dominio di una funzione

→ Esercizi a p. 1360

Dominio naturale



DEFINIZIONE

Il **dominio naturale** (o **campo di esistenza**) della funzione $y = f(x)$ è l'insieme più ampio dei valori reali che si possono assegnare alla variabile indipendente x affinché esista il corrispondente valore reale y.

Molto spesso una funzione viene assegnata senza indicare il dominio.
In questi casi deve essere determinato il suo *dominio naturale* e chiamiamo il dominio naturale anche soltanto **dominio**. Lo indichiamo con D.

Per esempio, la funzione $y = \sqrt{x^2 - 4}$ ha come dominio D: $x \leq -2 \vee x \geq 2$.

› Qual è il dominio di $y = \frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 8}}{x - 3}$?

Animazione nell'eBook

Domini delle funzioni principali

Funzione	Dominio
Funzioni razionali intere: $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$	$\mathbb{R}$
Funzioni razionali fratte: $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P e Q polinomi)	$\mathbb{R}$ esclusi i valori che annullano $Q(x)$
Funzioni irrazionali: $y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } n \text{ è pari} \\ \text{dominio di } f(x), \text{ se } n \text{ è dispari} \end{cases}$
Funzioni logaritmiche: $y = \log_a f(x)$ $a > 0, a \neq 1$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$
Funzioni esponenziali: $y = a^{f(x)}$ $a > 0, a \neq 1$	dominio di $f(x)$
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\} \cap$ dominio di $g(x)$
$f(x)^\alpha$ α irrazionale	$\begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\}, \text{ se } \alpha > 0 \\ \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}, \text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$
Funzioni goniometriche: $y = \sin x$, $y = \cos x$	$\mathbb{R}$
$y = \tan x$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, con $k \in \mathbb{Z}$
$y = \cot x$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$
$y = \arcsin x$, $y = \arccos x$	$[-1; 1]$
$y = \arctan x$, $y = \operatorname{arccot} x$	$\mathbb{R}$

› Trova il dominio di
a. $y = (x - 1)^{\sqrt{x}}$;
b. $y = x^x$;
c. $y = (x - 2)^{-x}$.

Video

Dominio di una funzione
Il dominio della funzione $f(x) = \tan x \cos x$ è lo stesso dominio della funzione $f(x) = \sin x$? Facciamo alcuni esempi.

TEORIA

Funzioni uguali

DEFINIZIONE

$y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono **funzioni uguali** se hanno lo stesso dominio D e $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in D$.

ESEMPIO

Le funzioni $f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$ e $g(x) = x$ sono uguali perché hanno lo stesso dominio $\mathbb{R}$ e $f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$ e $g(x) = x$ *non* sono uguali: $\frac{x(x-1)}{x-1} = x$ *solo se* $x \neq 1$.

ESERCIZI

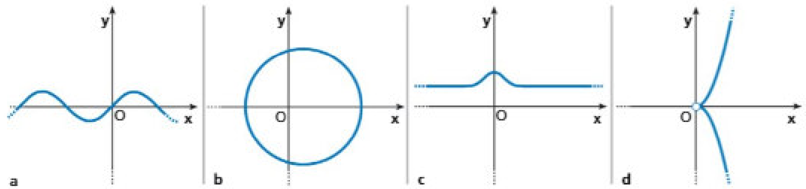
Inquadrami per fare le attività interattive

1 Funzioni reali di variabile reale

Definizione di funzione

→ Teoria a p. 1337

1 LEGGI IL GRAFICO Quali dei seguenti grafici rappresentano una funzione?



2 Indica il motivo per cui ciascuna delle seguenti scritture non può rappresentare una funzione.

a. $y = 1 - \ln(-\sqrt{x})$ **c.** $x = 6$ **e.** $x + |y| = 0$

b. $x^2 + y^2 = 9$ **d.** $y = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \le 0 \\ x^2 + 3 & \text{se } x \ge 0 \end{cases}$ **f.** $x^2 = 4$

3 AL VOLO Se x è la variabile indipendente, quale delle seguenti scritture rappresenta una funzione?

a. $x^2 = y^3 + 1$; **b.** $x = y^2 - 4$; **c.** $xy = x + 1$; **d.** $y^2 = x^2 - 1$.

COMPLETA le uguaglianze per ogni funzione assegnata.

4 $f(x) = \dfrac{3 - 4x}{x^2 + 1}$; $f(-1) = \square$, $f(\square) = 4$, $f(0) = \square$, $f(\square) = 3$.

5 $f(x) = 2^{x-1} + 2$; $f(\square) = \dfrac{5}{2}$, $f(\square) = 3$, $f(3) = \square$, $f(-2) = \square$

6 $f(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $f(\square) = \dfrac{1}{2}$, $f(\square) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \square$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \square$

7 $f(x) = 2\ln x - 1$; $f(1) = \square$, $f(e) = \square$, $f(\square) = -3$, $f(\square) = 3$.

8 $f(x) = \arcsin(x + 1)$; $f(0) = \square$, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \square$, $f(\square) = -\dfrac{\pi}{2}$, $f(\square) = 0$.

Per ogni funzione calcola, se esistono, i valori indicati a fianco.

9 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$; $f(0)$, $f(-1)$, $f(4)$, $f(1 - x)$.

10 $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{\ln x}}$; $f(4)$, $f(1)$, $f(e)$, $f(x + 4)$.

11 $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$; $f(-x)$, $f(3x)$, $f(x^2)$, $f^2(x)$.

12 $f(x) = \sqrt{x - 1}$; $-f(-x)$, $f(x^2 + 1)$, $f(x + 1)$.

13 Se $f(x) = 2^x$, mostrare che:

a. $f(x + 3) - f(x - 1) = \dfrac{15}{2} f(x)$; **b.** $\dfrac{f(x + 3)}{f(x - 1)} = f(4)$.

(Esame di Stato, Liceo scientifico, Scuole italiane all'estero, Sessione ordinaria, 2002, quesito 2)

14 Trova i valori di a e b per la funzione $f(x) = \dfrac{ax^2 - 2}{x + b}$ in modo che $f(-1) = -\dfrac{4}{5}$ e $f(0) = -\dfrac{1}{3}$.

$[a = -2, b = 6]$

15 Scrivi le seguenti funzioni in forma esplicita rispetto alla variabile y.

a. $x^2 - 2xy + 1 = 0$ **c.** $y \sin x + y - 1 = 0$ **e.** $2^y + 1 - x = 0$

b. $x + 2\ln y - 5 = 0$ **d.** $2xy + y - x - 1 = 0$ **f.** $xy^3 - 4 = 0$

16 Scrivi le seguenti funzioni in forma implicita.

a. $y = \dfrac{x - 1}{x + 4}$ **b.** $y = \dfrac{\ln x - 1}{x}$ **c.** $y = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$

Esplicita le seguenti equazioni rispetto alla variabile y e indica le condizioni di esistenza di y.

17 $4x^2 + y^2 - 16 = 0$

18 $3x^2 - 4y^2 + x - y = 0$

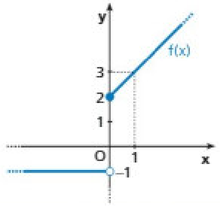
LEGGI IL GRAFICO

19 Dal grafico deduci:

a. il dominio e l'insieme immagine della funzione;

b. $f(-4), f(0), f(3), f\left(\dfrac{1}{2}\right)$;

c. l'espressione analitica di $f(x)$.

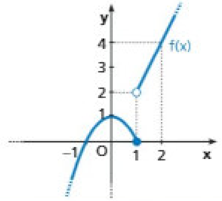


20 Osservando il grafico della figura determina:

a. il dominio e l'insieme immagine della funzione;

b. l'espressione analitica di $f(x)$ che, per $x \le 1$, è rappresentata da un arco di parabola con vertice sull'asse y;

c. $f(1), f(2), f(-1), f(0), f(-2), f(3)$.



21 Traccia i grafici corrispondenti alle seguenti equazioni:

a. $y = x - 1$; **b.** $x^2 + y^2 - 4x = 0$; **c.** $y = x^2 - 2x$; **d.** $x^2 - y^2 = 9$.

Quali di queste equazioni rappresentano una funzione?

22 Disegna il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{se } x < -1 \\ 2^{x-1} & \text{se } x \ge -1 \end{cases}.$$

Indica l'insieme immagine di $f(x)$ e calcola $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x) = 8$ e $f(x) = -4$.

23 Disegna il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x > 2 \\ x^2 - 4 & \text{se } x \le 2 \end{cases}.$$

Deduci dal grafico l'insieme immagine di $f(x)$ e calcola $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$.

3

24 Indica, tra le seguenti funzioni, quali sono razionali (intere o fratte), irrazionali, trascendenti.

a. $y=\frac{\sqrt{x^2}}{x-1}$; **b.** $y=\tan x+2$; **c.** $y=\frac{x^4+1}{x-3}$; **d.** $y=\frac{\sqrt{x+1}}{x}$; **e.** $y=\frac{1}{x+\sin x}$.

25 Disegna il grafico della funzione $f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } x<-2 \\ x^2+2x & \text{se } -2\le x<0 \\ 2 & \text{se } x\ge 0 \end{cases}$.

Determina l'insieme immagine di $f(x)$ e calcola $f(-4)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3)$. Trova poi per quali valori di x si ha $f(x)=-1$.

26 Disegna il grafico della funzione $f(x)=\begin{cases} |x|+1 & \text{se } -2\le x<1 \\ \log_{\frac{1}{2}} x & \text{se } x\ge 1 \end{cases}$.

Trova l'insieme immagine di $f(x)$ e calcola $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$. Determina per quali valori di x si ha $f(x)=-3$ e $f(x)=2$.

27 REALTÀ E MODELLI **Taxi in… funzione!** Alice chiama un taxi per andare in aeroporto.

a. Descrivi con una funzione come varia la tariffa del taxi in base ai kilometri percorsi.

b. Quanto spenderà Alice, che si trova a 18 km dall'aeroporto?

c. Determina dominio e insieme immagine della funzione trovata e traccia il suo grafico.

[b) € 23,50]

tariffe feriali diurne:

€ 3,00	diritto di chiamata
1,20 €/km	per i primi 4 km
1,15 €/km	dal quarto al decimo kilometro
1,10 €/km	dal decimo kilometro in poi

28 REALTÀ E MODELLI **Tra domanda e offerta** Un consulente analizza il modello di marketing di una piccola azienda agricola che vende pomodori. Il consulente trova che la domanda di pomodori sul mercato segue la funzione $q_1=\frac{600}{p}$, mentre l'offerta è descritta dalla funzione $q_2=2p-40$. In questi modelli, p è il prezzo al quintale dei pomodori.

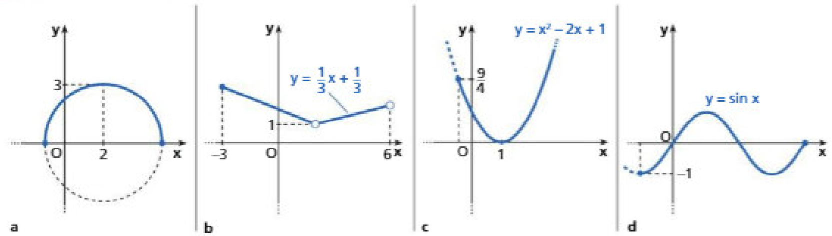
a. Rappresenta le due funzioni, esplicitando dominio e insieme immagine.

b. Calcola il prezzo di equilibrio, che porta domanda e offerta ad assumere lo stesso valore. [b) $p=30$ €/q]

Dominio di una funzione

→ Teoria a p. 1338

29 LEGGI IL GRAFICO Indica il dominio delle seguenti funzioni.



30 ASSOCIA ogni funzione al proprio dominio.

a. $y=\frac{2}{x^2-x}$ **b.** $y=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ **c.** $y=x^2-1$ **d.** $y=\frac{1}{x+|x|}$ **e.** $y=\frac{1}{x^3+x}$

1. $\mathbb{R}$ **2.** $x\ne 0$ **3.** $x\ne 0 \wedge x\ne 1$ **4.** $x>1$ **5.** $x>0$

Funzioni algebriche

31 ESERCIZIO GUIDA Determiniamo il dominio delle seguenti funzioni:

a. $y=\frac{x^2-1}{x^3-9x}$; **b.** $y=\sqrt{\frac{x+2}{x^2-6x+5}}$.

a. L'espressione ha significato solo se il denominatore è non nullo:

$x^3-9x\ne 0 \quad\rightarrow\quad x(x^2-9)\ne 0.$

Dominio: $x\ne 0 \,\wedge\, x\ne 3 \,\wedge\, x\ne -3$.

b. L'indice della radice è pari, quindi y esiste soltanto se:

$$\frac{x+2}{x^2-6x+5}\ge 0.$$

Studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

$x+2>0 \quad$ per $\quad x>-2$;

$x^2-6x+5>0 \quad$ per $\quad x<1 \vee x>5$.

Compiliamo il quadro dei segni.

		−2		1		5	
Segno di N	−	0	+		+		+
Segno di D	+		+	0	−	0	+
Segno di $\frac{N}{D}$	−	0	+	∄	−	∄	+

Dominio: $-2\le x<1 \;\vee\; x>5$.

Determina il dominio delle seguenti funzioni.

32 AL VOLO $y=\frac{1}{4x}$; $\quad y=2x^3-x$; $\quad y=\frac{1}{x^2+4}$; $\quad y=\sqrt{x+6}$.

33 $y=\frac{x-1}{x^2(x+5)}$ $[x\ne 0 \wedge x\ne -5]$

34 $y=\frac{x(x+3)}{x^2-9}+\frac{1}{x}$ $[x\ne \pm 3 \wedge x\ne 0]$

35 $y=\frac{|x|}{x^2+3x+4}$ $[\mathbb{R}]$

36 $y=\frac{x-1}{x^2-4x}$ $[x\ne 0 \wedge x\ne 4]$

37 $y=\frac{x}{2x^2-5x-3}$ $\left[x\ne -\frac{1}{2} \wedge x\ne 3\right]$

38 $y=\frac{1}{(2x^2-4x)(x+5)}$ $[x\ne 0 \wedge x\ne 2 \wedge x\ne -5]$

39 $y=\frac{2x-1}{x^3+4x^2-2x-8}$ $[x\ne \pm\sqrt{2} \wedge x\ne -4]$

40 $y=\frac{x-5}{x^3+x+2}$ $[x\ne -1]$

41 $y=\frac{1}{|x-2|+2}$ $[\mathbb{R}]$

42 $y=\frac{2x}{x^3-x^2-x-2}$ $[x\ne 2]$

43 $y=\frac{5}{\left(2-\frac{1}{x}\right)(4-x^2)}$ $\left[x\ne 0 \wedge x\ne \frac{1}{2} \wedge x\ne \pm 2\right]$

44 $y=\frac{x}{x^3-2x^2+x}$ $[x\ne 0 \wedge x\ne 1]$

45 $y=\frac{2+x}{x-|x|}$ $[x<0]$

46 $y=\frac{x}{x^3-3x^2+2x-6}$ $[x\ne 3]$

47 $y=\frac{x-3}{x^4-3x^2+2}$ $[x\ne \pm\sqrt{2} \wedge x\ne \pm 1]$

48 $y=\frac{x-1}{x^2-4|x|}$ $[x\ne 0 \wedge x\ne \pm 4]$

49 $y=\frac{x+5}{x^3+x^2-2x}$ $[x\ne -2 \wedge x\ne 0 \wedge x\ne 1]$

CAPITOLO 23
CALCOLO DEI LIMITI E CONTINUITÀ

Porta aperta con vista sull'infinito

Nello *Sposalizio della Vergine* di Raffaello, il punto all'infinito, dove convergono le linee prospettiche, è al centro del tempio e coincide con una porta aperta che lascia immaginare l'orizzonte lontano.
Anche il saper calcolare i limiti è, a suo modo, una porta aperta verso l'infinito.
In particolare, permette di studiare l'andamento delle funzioni con asintoti. Il grafico di una funzione e un suo asintoto si incontrano all'infinito, proprio come le linee prospettiche nel quadro di Raffaello.

Che cosa descrive un asintoto in un modello della realtà?

→ La risposta a pag. 1515

T TEORIA

1 Operazioni sui limiti

Nel capitolo precedente abbiamo dato la definizione di limite. In questo capitolo vediamo invece i teoremi e i metodi per calcolare i limiti.
Il calcolo di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ è semplice quando $f(x)$ è una funzione continua in x_0, perché basta calcolare $f(x_0)$, cioè basta sostituire il valore di x_0 nell'espressione di $f(x)$. Abbiamo già visto che le funzioni elementari sono continue nel loro dominio. Si possono allora calcolare velocemente limiti come i seguenti.

$$\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8, \quad \lim_{x \to -1} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-1} = -1,$$

$$\lim_{x \to 4} 2^x = 2^4 = 16, \quad \lim_{x \to \pi} \cos x = \cos \pi = -1.$$

Mettiamo in evidenza alcuni importanti limiti di funzioni elementari verificabili con la definizione e che si possono osservare anche nei rispettivi grafici.

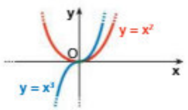
Limiti di funzioni elementari

→ Esercizi a p. 1521

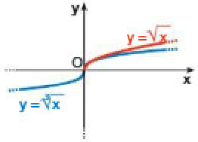
- **Funzioni potenza $y = x^n$**

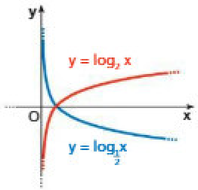
  Se n è pari: $\lim_{x \to \pm\infty} x^n = +\infty$.

  Se n è dispari: $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$.

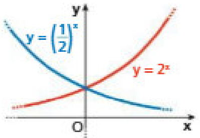


Scarica **GUARDA!** e inquadrami per accedere alle risorse digitali del capitolo





- **Funzioni radice** $y=\sqrt[n]{x}$
  Se n è pari: $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[n]{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.
  Se n è dispari: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n]{x}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$.
- **Funzioni esponenziali** $y=a^x$
  Se $a>1$: $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$.
  Se $0<a<1$: $\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$.
- **Funzioni logaritmiche** $y=\log_a x$
  Se $a>1$: $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty$.
  Se $0<a<1$: $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$.



Vediamo un esempio di utilizzo del limite di una funzione esponenziale.

ESEMPIO Un modello per il freezer

Il raffreddamento nel comparto per congelare del frigorifero di Luca può essere modellizzato dalla legge

$$T=24\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{0{,}5t}-18,$$

dove T è la temperatura in gradi centigradi e t il tempo in minuti.

► Sotto quale temperatura non è possibile scendere?

La funzione è decrescente, quindi calcoliamo:

$$\lim_{t\to+\infty}\left[24\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^{0{,}5t}}_{\text{tende a 0 perché } 0<\frac{1}{4}<1}-18\right]=-18 \quad\to\quad \text{la temperatura è } -18\ {}^\circ\text{C}.$$

Sono utili alcuni teoremi relativi alle operazioni sui limiti che ora esaminiamo.

I teoremi che enunceremo sono validi sia nel caso di limite per x che tende a un valore finito, sia nel caso di limite per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$.
Perciò, quando non sarà importante distinguere, indicheremo con «$x\to\alpha$» una qualsiasi delle seguenti scritture:

$$x\to x_0;\quad x\to x_0^+;\quad x\to x_0^-;\quad x\to+\infty;\quad x\to-\infty.$$

Limite della somma

→ Esercizi a p. 1521

Le funzioni hanno limite finito

ESEMPIO

Consideriamo $f(x)=2x-6$ e $g(x)=x+3$ e i loro limiti per $x\to 4$:

$$\lim_{x\to4}(2x-6)=2 \text{ e } \lim_{x\to4}(x+3)=7,$$

perché f e g sono funzioni continue.

La funzione somma $s(x)=f(x)+g(x)$ è: $s(x)=(2x-6)+(x+3)=3x-3$.

Il limite di $s(x)$ per x che tende a 4 è: $\lim\limits_{x\to4}(3x-3)=9$.

Osserviamo che $9=2+7$, ossia il limite di $s(x)$ è uguale alla somma dei limiti di $f(x)$ e di $g(x)$.

In generale, è vero che il limite della somma di due funzioni è uguale alla somma dei loro limiti, quando questi esistono e sono finiti.

TEOREMA
Se $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=l$ e $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=m$, dove $l, m\in\mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]=\lim_{x\to\alpha}f(x)+\lim_{x\to\alpha}g(x)=l+m.$$

DIMOSTRAZIONE
Siccome $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=l$, dalla definizione segue che per ogni valore positivo $\frac{\varepsilon}{2}$, arbitrariamente piccolo, esiste un intorno I_1 di α tale che:

$$l-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)<l+\frac{\varepsilon}{2},\qquad \forall x\in I_1 \text{ con } x\neq\alpha.$$

Analogamente, poiché $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=m$, in corrispondenza dello stesso $\frac{\varepsilon}{2}$ esiste un intorno I_2 di α tale che:

$$m-\frac{\varepsilon}{2}<g(x)<m+\frac{\varepsilon}{2},\qquad \forall x\in I_2 \text{ con } x\neq\alpha.$$

Per i punti x dell'intorno $I=I_1\cap I_2$ diversi da α, valgono entrambe le disuguaglianze precedenti e quindi, sommando membro a membro, otteniamo

$$\left(l-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(m-\frac{\varepsilon}{2}\right)<f(x)+g(x)<\left(l+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)\ \to$$

$$(l+m)-\varepsilon<f(x)+g(x)<(l+m)+\varepsilon,\qquad \forall x\in I \text{ con } x\neq\alpha.$$

Abbiamo pertanto verificato che in corrispondenza di ogni arbitrario $\varepsilon>0$ esiste un intorno di α tale che per ogni suo punto $x\neq\alpha$ si ha $|f(x)+g(x)-(l+m)|<\varepsilon$, cioè, per definizione

$$\lim_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]=l+m.$$

In particolare, questo teorema dice che, per ogni x_0 tale che $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ e $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)$, si ha $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=f(x_0)+g(x_0)$.
Questo significa che **la somma algebrica di due funzioni continue è una funzione continua**.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Che cosa succede quando una delle due funzioni ha limite infinito? E quando entrambe hanno limite infinito?
Con i simboli $+\infty$ e $-\infty$ non si possono eseguire operazioni ragionando come se si trattasse di numeri reali. Per esempio, si può dimostrare che se $\lim\limits_{x\to\alpha}f(x)=l$, con $l\in\mathbb{R}$, e $\lim\limits_{x\to\alpha}g(x)=+\infty$, allora $\lim\limits_{x\to\alpha}[f(x)+g(x)]=+\infty$, che è come dire:

$$l+(+\infty)=+\infty.$$

Una relazione simile per i numeri reali $a+b=b$ è vera solo se $a=0$.

> Considera le funzioni $f(x)=x$, $g(x)=x^2-x+3$ e verifica che $\lim\limits_{x\to2}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x\to2}f(x)+\lim\limits_{x\to2}g(x)$.

Listen to it

The limit of a sum of functions is the sum of the limits of the functions.

TEORIA

> Calcola:
> **a.** $\lim_{x \to +\infty} (x + x^2)$;
> **b.** $\lim_{x \to -\infty} (x + 2^x)$.

Riassumiamo nella tabella i vari casi che si possono presentare nei calcoli dei limiti della somma di due funzioni quando almeno una delle due funzioni ha limite infinito.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x) + g(x)]$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Nella tabella puoi notare che manca il caso in cui si sommano $+\infty$ e $-\infty$, che non ha come risultato 0, come ci si potrebbe erroneamente aspettare.

$+\infty - \infty$ è una **forma di indecisione** o **forma indeterminata**.

Questo significa che il risultato del limite cambia di volta in volta a seconda delle funzioni che abbiamo.
Mostriamolo con un esempio.

Consideriamo $f(x) = 2x$ e le funzioni:

$$g_1(x) = -2x + 1; \quad g_2(x) = -x; \quad g_3(x) = -3x.$$

Per $x \to +\infty$, il limite di $f(x)$ è $+\infty$ e i limiti di $g_1(x)$, $g_2(x)$ e $g_3(x)$ sono $-\infty$.

Calcoliamo le funzioni somma e i loro limiti per $x \to +\infty$:

$$s_1(x) = f(x) + g_1(x) = 2x - 2x + 1 = 1; \quad \lim_{x \to +\infty} s_1(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1;$$

$$s_2(x) = f(x) + g_2(x) = 2x - x = x; \quad \lim_{x \to +\infty} s_2(x) = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty;$$

$$s_3(x) = f(x) + g_3(x) = 2x - 3x = -x. \quad \lim_{x \to +\infty} s_3(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty.$$

Abbiamo ottenuto tre limiti diversi: non può quindi esistere una regola che permetta di ottenere in generale il limite della funzione somma $f(x) + g(x)$ quando i limiti delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$.
Per questo motivo diciamo che $+\infty - \infty$ è una forma indeterminata.
Vedremo nel prossimo paragrafo come eliminare l'indeterminazione e calcolare i limiti che si presentano in questa forma.

Limite del prodotto

→ Esercizi a p. 1521

Prodotto di una costante per una funzione con limite finito

TEOREMA
Sia k un numero reale e $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \to \alpha} f(x) = k \cdot l.$$

ESEMPIO
Se $\lim_{x \to 2} (3x - 1) = 5$, allora $\lim_{x \to 2} 4(3x - 1) = 4 \cdot 5 = 20$.

Il teorema precedente si dimostra applicando la definizione di limite.

Le funzioni hanno limite finito

Per il prodotto di due funzioni vale il teorema seguente.

TEORIA

TEOREMA
Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to \alpha} f(x) \cdot \lim_{x \to \alpha} g(x) = l \cdot m.$$

Listen to it
The limit of a product of functions is the product of the limits of the functions.

DIMOSTRAZIONE
Dimostriamo inizialmente il caso in cui $l = m = 0$.
Applichiamo la definizione di limite: per le ipotesi fatte possiamo dire che, preso $\varepsilon > 0$ arbitrariamente piccolo (possiamo assumere che $\varepsilon < 1$), esistono due intorni I_1 e I_2 di α tali che:

$$|f(x)| < \varepsilon, \forall x \in I_1 \text{ con } x \neq \alpha \quad \text{e} \quad |g(x)| < \varepsilon, \forall x \in I_2 \text{ con } x \neq \alpha.$$

Allora nell'intorno $I = I_1 \cap I_2$ sono verificate entrambe le disuguaglianze e quindi, moltiplicando tra loro entrambi i membri, abbiamo:

$$|f(x) \cdot g(x)| < \varepsilon^2 < \varepsilon, \quad \forall x \in I \text{ con } x \neq \alpha.$$

Ciò significa che $\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

Sfruttiamo questo risultato per dimostrare il caso generale. Osserviamo che

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = l \quad \to \quad \lim_{x \to \alpha} [f(x) - l] = 0;$$

$$\lim_{x \to \alpha} g(x) = m \quad \to \quad \lim_{x \to \alpha} [g(x) - m] = 0;$$

allora: $\lim_{x \to \alpha} [f(x) - l][g(x) - m] = 0$. Poiché

$$[f(x) - l][g(x) - m] = f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot m - l \cdot g(x) + l \cdot m \quad \to$$

$$f(x) \cdot g(x) = [f(x) - l][g(x) - m] + f(x) \cdot m + l \cdot g(x) - l \cdot m,$$

passando al limite in entrambi i membri, risulta:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = 0 + l \cdot m + l \cdot m - l \cdot m = l \cdot m.$$

ESEMPIO
Essendo $\lim_{x \to 1} 3x = 3$ e $\lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$, allora $\lim_{x \to 1} 3x(x + 1) = 3 \cdot 2 = 6$.
Infatti, la funzione prodotto è $p(x) = 3x(x + 1) = 3x^2 + 3x$, e il limite per x che tende a 1 di tale funzione è proprio uguale a 6.

> Calcola:
> $\lim_{x \to -1} 4xe^{-x}$.

Dal teorema del limite del prodotto si ricava quello del limite della **potenza di una funzione**.

TEOREMA
Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^n = l^n$, $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

> Calcola:
> $\lim_{x \to 1} (3x^2 - x)^4$.

In particolare, per $f(x) = x$ abbiamo: $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.
Inoltre, combinando questo risultato con i teoremi sul limite del prodotto di una funzione per una costante e sul limite della somma di due funzioni, possiamo determinare il limite di un polinomio $P(x)$ per x che tende a un valore finito x_0:

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Quindi possiamo dire che **i polinomi sono funzioni continue in $\mathbb{R}$**.

Il teorema si può estendere, con opportune restrizioni, anche al caso di esponente reale diverso da 0. In particolare, se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l \in \mathbb{R}$ e α è punto di accumulazione del dominio di $\sqrt[n]{f(x)}$, allora $\lim_{x \to \alpha} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$.

ESEMPIO

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{5x-1} = \lim_{x \to 1} (5x-1)^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{x \to 1} (5x-1)\right]^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Se le funzioni non hanno entrambe limite finito, per il limite del prodotto si possono presentare diversi casi che riassumiamo nella tabella, osservando che anche quando si usano i simboli $+\infty$ e $-\infty$ vale ancora la regola dei segni.

$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim[f(x) \cdot g(x)]$
$l > 0$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$
$l < 0$	$+\infty$ $-\infty$	$-\infty$ $+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

▸ Calcola:
$\lim_{x \to +\infty} -xe^x$ e
$\lim_{x \to 1^+} x\ln(x-1)$.

ESEMPIO

Supponiamo noti $\lim_{x \to 0^+} (x-2) = -2$ e $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$. Allora:

$$\lim_{x \to 0^+} (x-2)\ln x = +\infty.$$

Nella tabella precedente manca il caso in cui una funzione ha limite $l = 0$ e l'altra ha limite infinito perché

$0 \cdot \infty$ è una **forma indeterminata**.

Le regole del prodotto si estendono anche al limite della potenza di una funzione che ha limite $+\infty$ o $-\infty$. In particolare, per $f(x) = x$ abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}.$$

Più in generale, per una funzione $f(x)$ che ha limite $+\infty$ abbiamo la tabella a fianco, dove l'esponente $a \in \mathbb{R}$.

$f(x)$	a	$[f(x)]^a$
$+\infty$	$a > 0$	$(+\infty)^a = +\infty$
$+\infty$	$a < 0$	$(+\infty)^a = 0^+$

Il caso di $f(x)$ che tende a $-\infty$ non si può presentare perché la potenza $[f(x)]^a$, con $a \in \mathbb{R}$, è definita solo se $f(x) > 0$.

Limite del quoziente

→ Esercizi a p. 1522

Le funzioni hanno limite finito

Per il quoziente di due funzioni si può dimostrare un teorema analogo a quello del prodotto.

TEOREMA

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to \alpha} f(x)}{\lim_{x \to \alpha} g(x)} = \frac{l}{m}.$$

Listen to it

The limit of a quotient of two functions is the quotient of their limits (provided that the limit of the denominator is not 0).

▸ Calcola:
a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x-1}$;
b. $\lim_{x \to -5} \frac{1}{5-x}$.

ESEMPIO

$\lim_{x \to 3} (x-1) = 2$ e $\lim_{x \to 3} (2x+1) = 7$, quindi $\lim_{x \to 3} \frac{x-1}{2x+1} = \frac{2}{7}$.

Se invece $m = 0$, allora abbiamo due casi.

- $l \neq 0$ → $\lim_{x \to \alpha} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}}$ — $f(x)$ tende a ℓ; $g(x)$ tende a 0

Intuitivamente, se dividiamo un numero diverso da zero per un numero sempre più vicino a zero, otteniamo un numero sempre più grande in valore assoluto.
Si dimostra che in questo caso il **valore assoluto del quoziente** tende a $+\infty$. Inoltre, se $g(x)$ tende a 0 per eccesso o per difetto, cioè se $m = 0^+$ o $m = 0^-$, il limite del **quoziente** è $+\infty$ oppure $-\infty$, secondo la regola dei segni.

▸ Calcola:
a. $\lim_{x \to 0} \frac{3}{x^2}$;
b. $\lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x^2-1}$.

ESEMPIO

$\lim_{x \to 3^+} -2x = -6$ e $\lim_{x \to 3^+} (x-3) = 0^+$, quindi $\lim_{x \to 3^+} \frac{-2x}{x-3} = -\infty$.

- $l = 0$ → $\lim_{x \to \alpha} \frac{\boxed{f(x)}}{\boxed{g(x)}}$ — $f(x)$ tende a 0; $g(x)$ tende a 0

$\frac{0}{0}$ è una **forma indeterminata**.

Le funzioni non hanno entrambe limite finito

Si possono presentare i casi riassunti nella tabella, in cui l può anche essere uguale a 0. Per il caso in cui $m = 0$ e per il segno del limite vale quanto detto in precedenza.

Vediamo un esempio in cui il numeratore tende a un numero e il denominatore a $+\infty$.

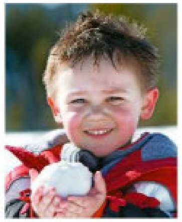
$\lim f(x)$	$\lim g(x)$	$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$
l	$+\infty$ $-\infty$	0 0
$+\infty$	$m > 0$, o $m = 0^+$ $m < 0$, o $m = 0$	$+\infty$ $-\infty$
$-\infty$	$m > 0$, o $m = 0^+$ $m < 0$, o $m = 0$	$-\infty$ $+\infty$

▸ Calcola:
a. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-10}$;
b. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-7}{x}$.

ESEMPIO Come neve al sole

Chiara ha pensato a un modello per descrivere come si sciolgono le palle di neve. Indicato con t il tempo in minuti e supponendo di avere completato la palla all'istante $t = 0$, il raggio r della palla in funzione di t è, in centimetri:

$$r(t) = \frac{72}{t+12}.$$



- Qual è il raggio iniziale? Dopo quanti minuti il raggio si dimezza?
- Calcoliamo $\lim_{t \to +\infty} r(t)$. Che significato ha?

$r(0) = \frac{72}{0+12} = \frac{72}{12} = 6$. Il raggio iniziale della palla di neve è 6 cm.

$\frac{6}{2} = \frac{72}{t+12} \to t = 12$. Il raggio si dimezza in 12 minuti.

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{72}{\underbrace{t+12}_{\text{tende a } +\infty}} = 0$$

Nel modello di Chiara, dopo un tempo prolungato, il raggio è 0, cioè la neve si è sciolta tutta.

Se invece entrambe le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno limite infinito:

$\frac{\infty}{\infty}$ è una **forma indeterminata**.

Limite delle funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ → Esercizi a p. 1522

Consideriamo funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$ aventi sia la base sia l'esponente variabili. Per l'esistenza di tali funzioni occorre che $f(x) > 0$.

TEOREMA
Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l > 0$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, allora: $\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^{g(x)} = l^m$.

ESEMPIO
$$\lim_{x \to 4} (\sqrt{x})^{x-1} = 2^3 = 8$$

Nei calcoli di tali limiti, $\mathbf{0^0}$, $\mathbf{1^\infty}$, $\mathbf{\infty^0}$ sono **forme indeterminate**, dove 0^0 indica $(0^+)^0$, 1^∞ indica $1^{+\infty}$ o $1^{-\infty}$, ∞^0 indica $(+\infty)^0$.

In tutti gli altri casi puoi determinare il valore di $\lim_{x \to \alpha} f(x)^{g(x)}$ utilizzando le proprietà dell'esponenziale.

Ottieni la tabella a fianco.

lim $f(x)$	lim $g(x)$	lim $[f(x)]^{g(x)}$
$0 \leq l < 1$	$+\infty$ $-\infty$	0^+ $+\infty$
$l > 1$	$+\infty$ $-\infty$	$+\infty$ 0^+

ESEMPIO
$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)}_{\text{tende a } \frac{1}{2}}^{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\text{tende a } +\infty}} = 0^+.$$

Infatti una funzione esponenziale con base compresa tra 0 e 1 tende a 0^+ se l'esponente tende a $+\infty$.

> Calcola:
> **a.** $\lim_{x \to +\infty} (x+1)^x$;
> **b.** $\lim_{x \to 0^-} (x+2)^{\frac{1}{x}}$;
> **c.** $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}}$.

Limite delle funzioni composte

Consideriamo due funzioni, $y = f(z)$ e $z = g(x)$, per le quali possiamo fare la composizione $f(g(x))$, cioè tali che $g(x)$ appartenga al dominio di f per ogni x appartenente al dominio di g.

TEOREMA
Siano $y = f(z)$ e $z = g(x)$ tali che $\lim_{x \to \alpha} g(x) = z_0$ e $f(z)$ sia continua in z_0.
Allora: $\lim_{x \to \alpha} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to \alpha} g(x)\right) = f(z_0)$.

ESEMPIO
$y = 2^{\sin x}$ è la funzione composta di $z = g(x) = \sin x$ e $y = f(z) = 2^z$.

$$\lim_{x \to \pi} 2^{\sin x} = 2^{\lim_{x \to \pi} \sin x} = 2^0 = 1$$

> Calcola:
> $\lim_{x \to 0} \ln \cos x$.

TEORIA

2 Forme indeterminate

> Listen to it
> When substitution doesn't give enough information to determine the value of the limit, we have found an **indeterminate form**.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, le forme di indecisione che possiamo incontrare nel calcolo dei limiti sono sette:

$$+\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Esaminiamo ora, attraverso alcuni esempi, come calcolare i limiti che si presentano in forma indeterminata. Non esistono regole generali per il calcolo delle forme indeterminate, che vanno quindi risolte caso per caso.

Forma indeterminata $+\infty - \infty$ → Esercizi a p. 1525

Limite di una funzione polinomiale

ESEMPIO
$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 3x^2 + 1)$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty - \infty$.
Raccogliendo il fattore x^4, il limite diventa:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\underbrace{\boxed{x^4}}_{\text{tende a } +\infty}\left(1 - \underbrace{\boxed{\frac{3}{x^2}}}_{\text{tende a } 0} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^4}}}_{\text{tende a } 0}\right)\right].$$

Quindi, per il teorema del limite del prodotto, risulta:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x^4\left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4}\right)\right] = +\infty.$$

Il procedimento utilizzato nell'esempio si generalizza come segue.

In generale, per calcolare il limite di una funzione polinomiale di grado n per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$), con forma indeterminata $+\infty - \infty$, raccogliamo a fattor comune x^n:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right).$$

I limiti di $\frac{a_1}{x}, \frac{a_2}{x^2}, \ldots, \frac{a_n}{x^n}$ valgono 0, quindi:

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} a_0 x^n.$$

> Calcola:
> **a.** $\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x)$;
> **b.** $\lim_{x \to -\infty} (x^3 + x^2)$.
>
> **Animazione** nell'eBook

9

TEORIA

Tale limite vale $+\infty$ o $-\infty$. Il segno si determina applicando la regola dei segni al prodotto a_0x^n.

Limite di una funzione irrazionale

ESEMPIO

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$ si presenta nella forma indeterminata $+\infty-\infty$.

Per calcolare questo limite possiamo riscrivere la funzione data in modo che scompaia la differenza $x-\sqrt{x^2+1}$ e appaia invece la somma $x+\sqrt{x^2+1}$.

Per far ciò, moltiplichiamo e dividiamo la funzione per $x+\sqrt{x^2+1}$, che è sicuramente diverso da 0 per x che tende a $+\infty$, e utilizziamo il prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

$$x-\sqrt{x^2+1}=(x-\sqrt{x^2+1})\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2-(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}=$$

$$\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

Se $x\to+\infty$, $x+\sqrt{x^2+1}$ tende a $+\infty$, quindi la frazione tende a 0:

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+1})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0.$$

> Calcola:
> $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1-\sqrt{x^2+2x})$.
>
> **Animazione** nell'eBook

> Calcola:
> $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$.

Forma indeterminata $0\cdot\infty$

→ Esercizi a p. 1526

ESEMPIO

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x$ è nella forma indeterminata $0\cdot\infty$, perché:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)=0\quad\text{e}\quad\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty.$$

Ricordiamo che $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ e moltiplichiamo e dividiamo la funzione data per $(1+\sin x)$, che è diverso da 0 per x in un intorno di $\dfrac{\pi}{2}$:

$$(1-\sin x)\cdot\tan x\cdot\frac{1+\sin x}{1+\sin x}=$$

$$\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^{\cancel{2}}x}{1+\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}=\frac{\sin x\cdot\cos x}{1+\sin x}.$$

Abbiamo semplificato per $\cos x$ poiché è diverso da 0 per $x\to\dfrac{\pi}{2}^-$.

Il numeratore $\sin x\cdot\cos x$ tende a 0, mentre il denominatore $1+\sin x$ tende a 2, quindi, per il teorema del limite del quoziente, la frazione tende a 0:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x=0.$$

> Calcola:
> $\lim\limits_{x\to0^+}2(\cos x-1)\cdot\cot x$.
>
> **Animazione** nell'eBook

> Calcola:
> $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x\cot x$.

Forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$

→ Esercizi a p. 1527

Limite di una funzione razionale fratta per $x\to\pm\infty$

Dato il limite $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, quando almeno un coefficiente delle potenze di x è diverso da 0 sia a numeratore sia a denominatore, questo limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$, perché il numeratore e il denominatore tendono a $+\infty$ o $-\infty$ se $n\geq1$ e $m\geq1$.

TEORIA

Forniamo tre esempi di calcolo di limite con $n>m$, $n=m$, $n<m$, dove n e m sono rispettivamente il grado del numeratore e quello del denominatore.

Il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5-2x^2+1}{-3x^2-2x+6}$.

Raccogliamo x^5 al numeratore e x^2 al denominatore e semplifichiamo; possiamo infatti supporre $x\neq0$ perché x tende a $+\infty$ (lo stesso accadrebbe se x tendesse a $-\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5\cdot\left(1-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{x^2\cdot\left(-3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{x^3}}_{\text{tende a }+\infty}\cdot\frac{\overbrace{\boxed{\left(1-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}}^{\text{tende a }1}}{\underbrace{\boxed{\left(-3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}}_{\text{tende a }-3}}=-\infty.$$

Osserviamo che il segno del limite si ottiene dal prodotto dei segni di $+\infty$ e $-\dfrac{1}{3}$.

Il grado del numeratore è uguale al grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\dfrac{1-2x^2}{3x^2+2x-5}$.

Raccogliamo x^2 e semplifichiamo:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\cdot\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)}{x^2\cdot\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\overbrace{\boxed{\left(\dfrac{1}{x^2}-2\right)}}^{\text{tende a }-2}}{\underbrace{\boxed{\left(3+\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}}_{\text{tende a }3}}=-\frac{2}{3}.$$

Osserviamo che $-\dfrac{2}{3}$ è il rapporto fra i coefficienti della potenza di grado massimo del numeratore e del denominatore.

> **MATEMATICA E STORIA**
>
> **Un limite notevole**
>
> Per mostrare che «$\dfrac{(x+1)^m}{x^m}$ ha l'unità come suo limite quando x viene aumentato senza limite», il matematico inglese Augustus De Morgan (1806-1871) usa l'uguaglianza
> $\dfrac{(x+1)^m}{x^m}=1+\dfrac{mx^{m-1}+\text{etc.}}{x^m}$.
>
> - Verifica che l'uguaglianza è sempre vera $\forall m\in\mathbb{N}-\{0\}$.
> - Giustifica la seguente affermazione di De Morgan: «Il numeratore di quest'ultima frazione diminuisce indefinitamente se comparato con il suo denominatore» (mostrando così che il valore del limite citato all'inizio di questo esercizio è proprio 1).
>
> **Risposta – Esercizio in più**

Il grado del numeratore è minore del grado del denominatore

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x^3+2x}$.

Raccogliamo x al numeratore, x^3 al denominatore e semplifichiamo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x\cdot\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}{x^3\cdot\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{\text{tende a }0}\cdot\frac{\overbrace{\boxed{\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}}^{\text{tende a }2}}{\underbrace{\boxed{\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)}}_{\text{tende a }1}}=0.$$

> Calcola:
>
> a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^2+1}$;
>
> b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+x}{-2x^2+3}$;
>
> c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x-x^5}{2+x^2}$.
>
> **Animazione** nell'eBook

TEORIA

In generale, data una funzione razionale fratta

$$f(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m},$$

con il numeratore di grado $n \geq 1$ e il denominatore di grado $m \geq 1$, abbiamo:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}\pm\infty & \text{se } n>m\\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n=m\,.\\ 0 & \text{se } n<m\end{cases}$$

Il segno del limite nel caso $n > m$ è dato dal prodotto dei segni di:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}} x^{n-m} \quad \text{e} \quad \frac{a_0}{b_0}.$$

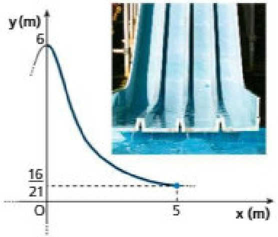
Vediamo un esempio in un contesto reale in cui $n = m$.

ESEMPIO **Allunga lo scivolo**

In un parco acquatico, il profilo dello scivolo di una piscina è rappresentato dal tratto di grafico della funzione

$$y=\frac{2x^2+30}{4x^2+5}$$

evidenziato in figura (l'acqua è ad altezza 0).



► Quale sarebbe l'altezza del punto più basso dello scivolo se aumentassimo sempre più la sua lunghezza?

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+30}{4x^2+5}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Il punto più basso dello scivolo avrebbe un valore limite di 0,5 m sul livello dell'acqua.

Video

Le forme indeterminate $0\cdot\infty$, $\frac{0}{0}$

- Calcoliamo: $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+1}{x^2-1}\cdot(\sqrt{x}-1)$.

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

→ Esercizi a p. 1529

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}$.

Si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$, perché:

$$\lim_{x\to3}(x^2-2x-3)=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to3}(2x^2-9x+9)=0.$$

Il valore 3 annulla sia il polinomio al numeratore sia quello al denominatore, quindi scomponiamo in fattori entrambi e semplifichiamo, poiché per $x \to 3$ possiamo supporre $x - 3 \neq 0$.

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{2x^2-9x+9}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(2x-3)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{4}{3}$$

> Calcola:
>
> $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x^3-3x^2+4}$.
>
> **Animazione** nell'eBook

> Calcola:
>
> $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-x-2}$.

La tecnica utilizzata in questo esempio si applica, più in generale, al caso del quoziente di due polinomi $f(x)$ e $g(x)$ che si annullino entrambi per $x \to x_0$.

Forme indeterminate $0^0, \infty^0, 1^\infty$

→ Esercizi a p. 1530

Video

Le forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞

- Come si calcola il limite di potenze con base a esponente variabile?

Le forme indeterminate $0^0, \infty^0, 1^\infty$ si incontrano nei calcoli di limite del tipo

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)}, \quad \text{con } f(x) > 0.$$

Per risolvere, ricorriamo all'identità $a = e^{\ln a}$ (con $a > 0$).

$$f(x)^{g(x)}=e^{\ln f(x)^{g(x)}} \quad \to \quad \boxed{f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}}$$

Allora se, per esempio, $g(x) \to 0$ e $f(x) \to 0^+$, nella funzione $e^{g(x)\ln f(x)}$ all'esponente compare la forma indeterminata $0 \cdot \infty$.

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$, si ha la forma indeterminata ∞^0.

Scriviamo: $x^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}}=e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}}\cdot\cancel{\ln x}}=e$. Il limite vale allora e.

> Calcola:
>
> $\lim_{x\to0^+}(3x)^{\frac{1}{\ln 3x}}$.

TEORIA

3 Limiti notevoli

→ Esercizi a p. 1534

Illustriamo alcuni limiti particolari, detti *notevoli*, che sono utili nelle applicazioni dell'analisi e abbreviano i passaggi nel calcolo dei limiti.

Limiti di funzioni goniometriche

Consideriamo $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$, dove l'angolo x è misurato in radianti.

Poiché $\lim_{x\to0}\sin x = 0$ e $\lim_{x\to0} x = 0$, siamo in presenza della forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Dimostriamo che

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che la funzione $\frac{\sin x}{x}$ è pari, poiché

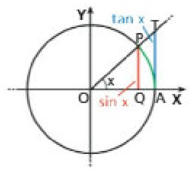
$$f(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=f(x),$$

e perciò il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Concludiamo che

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x},$$

e possiamo quindi limitarci nella dimostrazione al caso $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}$.

Consideriamo la circonferenza goniometrica e un angolo positivo di ampiezza x.



Poiché $x \to 0^+$, si può supporre $x < \frac{\pi}{2}$.

Video

Teorema del confronto
Qual è il limite di $\frac{\sin x}{x}$ per x che tende a 0? Vediamo come si calcola applicando il teorema del confronto.

TEORIA

Se x è in radianti, la sua misura coincide con quella di $\overset{\frown}{AP}$, mentre la misura di PQ è $\sin x$ e quella di TA è $\tan x$. Essendo $\overline{PQ} < \overset{\frown}{AP} < \overline{TA}$, abbiamo che

$$\sin x < x < \tan x.$$

Dividiamo i termini della disuguaglianza per $\sin x$, mantenendo i versi delle disuguaglianze perché $\sin x > 0$ se $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \text{ — passando ai reciproci}$$

Poiché $\lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ e $\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$, per il teorema del confronto si ha che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ quindi } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Se l'angolo è in gradi invece che in radianti, si dimostra che:

$$\lim_{x^\circ \to 0^\circ} \frac{\sin x^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}.$$

Osservazione. Il limite studiato si può applicare anche quando al posto della variabile x compare una funzione $y = f(x)$ che tende a zero. Per esempio:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1.$$

Infatti, se poniamo $y = x - 2$, per $x \to 2$ risulta $y \to 0$, quindi: $\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$.

Un'osservazione simile vale per tutti i limiti notevoli che stiamo per analizzare.

> Calcola:
> $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + 4x}{\sin 4x + x}$.
> **Animazione** nell'eBook

Dal limite notevole $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si deducono i seguenti limiti, che si presentano anch'essi nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

DIMOSTRAZIONE

Moltiplicando numeratore e denominatore per $1 + \cos x$, otteniamo

$$\frac{1-\cos x}{x} \cdot \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} =$$

$$\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1+\cos x},$$

quindi, per il teorema del prodotto dei limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right) = 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

> Calcola:
> $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2}$.
> **Animazione** nell'eBook

In modo analogo si dimostra: $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

Consideriamo $\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Poiché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$, siamo in presenza della forma indeterminata 1^∞.

Si dimostra che questo limite tende al numero di Nepero $e = 2{,}71828\ldots$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

> Calcola:
> $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-4}{x}\right)^x$.
> **Animazione** nell'eBook

Da questo limite possiamo dedurne altri, nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Dimostriamo, per esempio, il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

> Calcola:
> $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-9x^2)}{x}$.
> **Animazione** nell'eBook

DIMOSTRAZIONE

Applicando le proprietà dei logaritmi possiamo scrivere

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

e quindi, per la continuità della funzione logaritmica:

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}\right].$$

Poniamo ora $y = \frac{1}{x}$, allora $x = \frac{1}{y}$ e per $x \to 0$ abbiamo $y \to \pm\infty$.

Effettuando la sostituzione di variabile nel limite precedente, otteniamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left[\lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right] = \ln e = 1.$$

TEORIA

Più in generale, si dimostra che, se $a > 0$ e $a \neq 1$: $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$.

> Calcola:
> $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - e^x}{4x}$.
> **Animazione** nell'eBook

Dimostriamo anche il seguente limite: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

DIMOSTRAZIONE

Poniamo $y = e^x - 1$, allora $e^x = 1 + y$. Per $x \to 0$ si ha $y \to 0$, quindi $1 + y$ risulta positivo e dunque $x = \ln(1 + y)$. Sostituendo, otteniamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Video

Il limite notevole
$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

- Calcoliamo:
  $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2^x - 1}$.

Più in generale, si dimostra che, se $a > 0$ e $a \neq 1$: $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^k - 1}{x} = k$$

DIMOSTRAZIONE

Se $k = 0$, la funzione al numeratore è la funzione nulla, quindi il limite è verificato. Supponiamo ora $k \neq 0$. Scriviamo $(1+x)^k = e^{\ln(1+x)^k} = e^{k\ln(1+x)}$.

Sostituiamo e moltiplichiamo numeratore e denominatore per $k\ln(1+x)$:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{k\ln(1+x)} - 1}{x} \cdot \underbrace{\frac{k\ln(1+x)}{k\ln(1+x)}}_{\text{diverso da 0 per } x \to 0}\right).$$

Applichiamo i due limiti notevoli precedenti:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{k\ln(1+x)}-1}{k\ln(1+x)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot k\right)=1\cdot 1\cdot k=k.$$

4 Infinitesimi, infiniti e loro confronto

Infinitesimi

→ Esercizi a p. 1546

DEFINIZIONE

Una funzione $f(x)$ è un **infinitesimo per $x\to\alpha$** quando il limite di $f(x)$ per $x\to\alpha$ è uguale a 0.

Nella definizione, α può essere finito o $+\infty$ o $-\infty$. La definizione si estende anche ai casi di limite sinistro ($x\to\alpha^-$) e destro ($x\to\alpha^+$).

ESEMPIO

$f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ è un infinitesimo sia per $x\to+\infty$ sia per $x\to-\infty$, perché

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+2}=0.$$

> Verifica che la funzione $f(x)=x^3-2x$ è un infinitesimo per $x\to 0$.

Funzioni del tipo

$$\frac{1}{x},\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3},\ldots \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{x}},\frac{1}{\sqrt[3]{x}},\ldots$$

sono tutte infinitesimi per $x\to+\infty$ e per $x\to-\infty$ (da quest'ultimo caso sono esclusi i reciproci delle radici di indice pari).

Confronto tra infinitesimi

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi degli infinitesimi per $x\to\alpha$, allora $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ e si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi simultanei**.

In questo caso è interessante vedere quale dei due infinitesimi tende a 0 «più rapidamente»; possiamo stabilire ciò determinando il limite (se esiste) del loro rapporto per $x\to\alpha$.

Siano dunque $f(x)$ e $g(x)$ due infinitesimi simultanei per $x\to\alpha$ e supponiamo che esista un intorno I di α tale che $g(x)\neq 0$ per ogni $x\in I$, con $x\neq\alpha$.

- Se $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$ (l finito), si dice che $f(x)$ e $g(x)$ sono **infinitesimi dello stesso ordine** (vuol dire che tendono a 0 con la stessa rapidità).
- Se $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine superiore** a $g(x)$ (cioè f tende a 0 più rapidamente di g).
- Se $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, si dice che $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine inferiore** a $g(x)$ (cioè f tende a 0 meno rapidamente di g).
- Se *non esiste* il $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, si dice che **gli infinitesimi** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili**.

ESEMPIO

1. Gli infinitesimi $f(x)=\ln(1+x)$ e $g(x)=x$, per $x\to 0$, sono dello stesso ordine perché $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1\neq 0$.
2. $f(x)=e^x-1$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)=x^3$, per $x\to 0$, perché:
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=1\cdot(+\infty)=+\infty.$$
3. Gli infinitesimi $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ e $g(x)=x$, per $x\to 0$, non sono confrontabili, perché
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$
non esiste.

> Confronta fra loro gli infinitesimi $f(x)=1-\cos x$ e $g(x)=x^4$ per $x\to 0$.

> Puoi dimostrare che $x\sin\dfrac{1}{x}$ è un infinitesimo per $x\to 0$ con il teorema del confronto.

DEFINIZIONE

Per $x\to\alpha$, $f(x)$ è un **infinitesimo di ordine γ** ($\gamma>0$) rispetto all'infinitesimo $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^\gamma$, cioè se:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{[g(x)]^\gamma}=l\neq 0.$$

Diciamo inoltre che $g(x)$ è preso come **infinitesimo campione**. In generale, come infinitesimo campione, si prende:

$$g(x)=x-x_0,\quad \text{se } x\to x_0; \qquad g(x)=\frac{1}{x},\quad \text{se } x\to\pm\infty.$$

ESEMPIO

L'infinitesimo $f(x)=\dfrac{x-4}{x^5+1}$, per $x\to+\infty$, è di ordine 4 rispetto a $\dfrac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x-4}{x^5+1}}{\frac{1}{x^4}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^5-4x^4}{x^5+1}=1\neq 0.$$

DEFINIZIONE

Gli **infinitesimi** $f(x)$ e $g(x)$, per $x\to\alpha$, sono **equivalenti**, o **asintoticamente uguali**, se:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Si scrive $f\sim g$ e uno dei due si dice **parte principale** dell'altro.
Due infinitesimi equivalenti hanno lo stesso ordine.
Esempi di infinitesimi equivalenti, per $x\to 0$, sono:

$$\sin x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad e^x-1\sim x,$$

che abbiamo visto come limiti notevoli.
Si può dimostrare il seguente teorema.

TEOREMA

Principio di sostituzione degli infinitesimi

Se esiste il limite del rapporto di due infinitesimi simultanei $f(x)$ e $g(x)$, allora esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinitesimo con la sua parte principale (cioè con un infinitesimo a esso equivalente):

$$f \sim f_1,\ g \sim g_1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

ESEMPIO

Calcoliamo $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 2x}$.

Poiché $\ln(1+5x) \sim 5x$ e $\sin 2x \sim 2x$, abbiamo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.$$

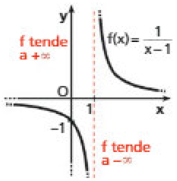
Infiniti

→ Esercizi a p. 1547

DEFINIZIONE

Una funzione $f(x)$ è un **infinito per $x \to \alpha$** quando il limite di $f(x)$ per $x \to \alpha$ vale $+\infty$ o $-\infty$.

Nella definizione, α può essere finito o $+\infty$ o $-\infty$. La definizione si estende anche ai casi di limite sinistro ($x \to \alpha^-$) e destro ($x \to \alpha^+$).



ESEMPIO

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ è un infinito per $x \to 1^{\pm}$ perché $\lim_{x \to 1^{\pm}} \dfrac{1}{x-1} = \pm\infty$.

Le funzioni del tipo $x, x^2, x^3, \ldots$ e anche $\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}, \ldots$ sono infiniti per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$ (da quest'ultimo caso sono escluse le radici di indice pari).

Confronto tra infiniti

Per gli infiniti possiamo introdurre dei concetti analoghi a quelli visti per gli infinitesimi. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambi infiniti per $x \to \alpha$, allora $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$ e $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti simultanei**.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due infiniti simultanei per $x \to \alpha$.

- Se $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ (l finito), $f(x)$ e $g(x)$ sono **infiniti dello stesso ordine**.
- Se $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f(x)$ è un **infinito di ordine inferiore** a $g(x)$.
- Se $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$, $f(x)$ è un **infinito di ordine superiore** a $g(x)$.
- Se *non esiste* il $\lim_{x \to \alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, **gli infiniti** $f(x)$ e $g(x)$ **non sono confrontabili.**

Video

Infinitesimi, infiniti e loro confronto

- Facciamo alcuni esempi per spiegare come si applica il teorema del confronto.

TEORIA

ESEMPIO

Calcolando i limiti indicati nelle precedenti definizioni, puoi verificare le seguenti affermazioni.

1. Gli infiniti $f(x) = x^5$ e $g(x) = 3x^5 + 2$, per $x \to +\infty$, sono dello stesso ordine.
2. Gli infiniti $f(x) = x^3(\cos x + 2)$ e $g(x) = x^3$, per $x \to +\infty$, non sono confrontabili.

> Confronta fra loro gli infiniti $f(x) = -4x^3 - 1$ e $g(x) = x^4 - x^3$ per $x \to +\infty$.

> Dimostra che $x^3(\cos x + 2)$ è un infinito per $x \to +\infty$ mediante il teorema del confronto.

DEFINIZIONE

Dati due infiniti $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, si dice che $f(x)$ è un **infinito di ordine γ** ($\gamma > 0$) rispetto a $g(x)$, quando $f(x)$ è dello stesso ordine di $[g(x)]^{\gamma}$, cioè se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{[g(x)]^{\gamma}} = l \neq 0.$$

Diciamo inoltre che $g(x)$ è preso come **infinito campione**. In generale, si considera come infinito campione:

$$g(x) = \frac{1}{x - x_0}, \quad \text{se } x \to x_0; \qquad g(x) = x, \quad \text{se } x \to \pm\infty.$$

ESEMPIO

L'infinito $f(x) = \dfrac{x+2}{2x^3 - 5x^2}$, per $x \to 0$, è di ordine 2 rispetto a $\dfrac{1}{x}$, infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x+2}{2x^3 - 5x^2}}{\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2}{2x^3 - 5x^2} = -\frac{2}{5} \neq 0.$$

DEFINIZIONE

Due **infiniti** $f(x)$ e $g(x)$, per $x \to \alpha$, sono **equivalenti**, o **asintoticamente uguali**, se:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Si scrive $f \sim g$. Due infiniti equivalenti hanno lo stesso ordine.
Inoltre, uno dei due si dice **parte principale** dell'altro.

ESEMPIO

$f(x) = 3x^6 + 4x^3 + 2x - 1$ è un infinito, per $x \to +\infty$, equivalente a $g(x) = 3x^6$.

$3x^6$ è la parte principale di $f(x)$.

TEOREMA

Principio di sostituzione degli infiniti

Se esiste il limite del rapporto di due infiniti simultanei $f(x)$ e $g(x)$, allora esso resta invariato se si sostituisce ciascun infinito con la sua parte principale (cioè con un infinito a esso equivalente):

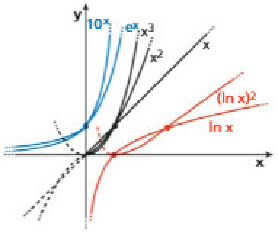
$$f \sim f_1,\ g \sim g_1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \alpha} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}.$$

TEORIA

TEORIA

Gerarchia degli infiniti

Spesso non è facile confrontare due infiniti e calcolare il limite del loro rapporto. Per esempio, anche con l'aiuto dei limiti notevoli, non possiamo calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}$. Si può però dimostrare che, per $x\to+\infty$, le funzioni logaritmiche del tipo $(\log_a x)^\alpha$, con $a>1$ e $\alpha>0$, tendono a infinito meno rapidamente delle potenze x^β, con $\beta>0$, le quali a loro volta tendono a infinito meno rapidamente delle funzioni esponenziali b^x, con $b>1$.



Sinteticamente, possiamo scrivere, riferendoci agli ordini di infinito:

$$(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x.$$

> Calcola:
> a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\log x)^{1000}}{x^4}$;
> b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{50}}{3^x}$;
> c. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}}{\left(\frac{3}{2}\right)^x}$.

Possiamo sfruttare questa *gerarchia* per calcolare rapidamente i limiti che coinvolgono le funzioni esaminate.

ESEMPIO

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log_2 x)^{100}}{\sqrt{x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2^x}=0.$$

5 Calcolo del limite di una successione

→ Esercizi a p. 1549

Video

Numero di Nepero
- Cos'è il numero di Nepero?
- Perché è legato alla successione $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$?

Anche nel calcolo dei limiti di successioni valgono tutti i teoremi e le regole visti per le funzioni, per $x\to+\infty$, come per esempio quelli dei limiti di somme, prodotti, quozienti, … In particolare, valgono le regole dei limiti notevoli.

ESEMPIO

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-2n^3+n}{n^3-1}=-2$ perché il numeratore e il denominatore sono polinomi che hanno lo stesso grado.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$ e, poiché $\frac{1}{n}\to 0$, il limite vale 1 per analogia con il limite notevole $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

> Calcola
> $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$.

Per $n\to+\infty$, vale inoltre la seguente **gerarchia degli infiniti**:

$$\log_a n < n^\alpha < a^n < n! < n^n,\ \text{se } a>1,\quad \alpha>0,$$

dove $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

ESEMPIO

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4^n}{n!}=0$ perché $n!$ è un infinito di ordine superiore a 4^n.

> Calcola
> $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^4}{\ln n}$.

TEORIA

Limiti delle progressioni

Limite di una progressione aritmetica

In una progressione aritmetica di ragione d, abbiamo:

$$a_n=a_1+(n-1)\cdot d,$$

quindi:

1. se $d=0$, cioè $a_n=a_1$, $\forall n>1$, allora la successione è costante e $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a_1$;
2. se $d\neq 0$, allora:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}[a_1+(n-1)\cdot d]=\begin{cases}+\infty, & \text{se } d>0\\ -\infty, & \text{se } d<0\end{cases}.$$

Pertanto vale la seguente proprietà.

> Calcola il limite per $n\to+\infty$ della progressione aritmetica:
> $2,\ \frac{11}{6},\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{2},\ \ldots$

PROPRIETÀ
Una progressione aritmetica di ragione $d\neq 0$ è sempre divergente.

Limite di una progressione geometrica

In una progressione geometrica di ragione q, abbiamo:

$$a_n=a_1\cdot q^{n-1},$$

pertanto:

- se $q\le -1$, allora a_n cambia alternativamente segno al crescere di n e il suo valore assoluto tende a $+\infty$ per n tendente a $+\infty$, ma *non esiste il limite* $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$;
- se $-1<q<1$, allora $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ e quindi:
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_1q^{n-1}=0;$$
- se $q=1$, la progressione geometrica è costante e quindi:
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=a_1;$$
- se $q>1$, allora:
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}a_1q^{n-1}=\begin{cases}+\infty, & \text{se } a_1>0\\ -\infty, & \text{se } a_1<0\end{cases}.$$

$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$	convergente →	$\begin{cases}a_1 & \text{se } q=1\\ 0 & \text{se } -1<q<1\end{cases}$	se	$-1<q\le 1$
	divergente →	$\begin{cases}+\infty & \text{se } a_1>0\\ -\infty & \text{se } a_1<0\end{cases}$	se	$q>1$
	indeterminata →	non ammette limite	se	$q\le -1$

> Calcola i limiti per $n\to+\infty$ delle seguenti progressioni geometriche.
> a. $\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{4},\ \frac{27}{8},\ \ldots$
> b. $\frac{3}{2},\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{4}{9},\ \frac{8}{27},\ \ldots$
> c. $2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots$

6 Funzioni continue

Definizioni

→ Esercizi a p. 1552

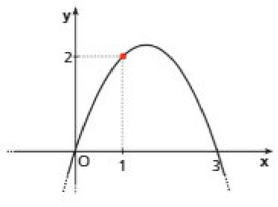
Approfondiamo il concetto di funzione continua.
Ricordiamo che una funzione $f(x)$, definita in un intorno di un punto x_0, è **continua in x_0** se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

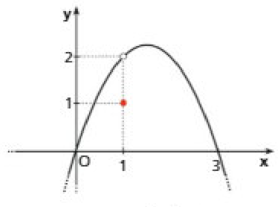
> Stabilisci se la funzione
> $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x < 0 \\ 2e^x - 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$
> è continua in $x_0 = 0$.

Una funzione $f(x)$ è quindi continua in x_0 se:

- è definita in x_0, cioè esiste $f(x_0)$;
- esiste finito $\lim_{x \to x_0} f(x)$;
- il valore del limite è uguale a $f(x_0)$.

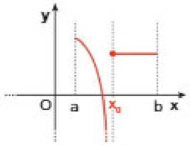


a. La funzione $f(x) = -x^2 + 3x$ è definita in $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$.

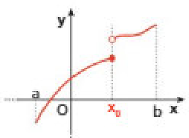


b. La funzione $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ ha limite $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq f(1)$.

Consideriamo le funzioni i cui grafici sono illustrati in figura. Sono entrambe definite in $x = 1$ e hanno lo stesso limite per x che tende a 1; nel caso **a** tale limite coincide con il valore $f(1)$ della funzione nel punto 1, mentre nel caso **b** questo non accade. Nel primo caso la funzione è *continua in* $x = 1$, mentre nel secondo la funzione *non è continua in* $x = 1$.



La funzione è continua a destra in x_0.



La funzione è continua a sinistra in x_0.

La definizione di funzione continua in x_0 può essere anche espressa in modo equivalente come $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

Infatti, posto $x_0 + h = x$, se $h \to 0$ si ha che $x \to x_0$, dunque $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Se consideriamo solo il limite destro o sinistro di una funzione $f(x)$, possiamo dare le seguenti definizioni.

- $f(x)$ è **continua a destra** in x_0, se $f(x_0)$ coincide con il limite destro di $f(x)$ per x che tende a x_0:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$
- $f(x)$ è **continua a sinistra** in x_0, se $f(x_0)$ coincide con il limite sinistro di $f(x)$ per x che tende a x_0:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

È possibile allora parlare di continuità anche per punti che sono estremi dell'intervallo $[a; b]$ in cui la funzione è definita; nel punto a si parla di continuità a destra, mentre nel punto b si parla di continuità a sinistra.

DEFINIZIONE
Una funzione definita in $[a; b]$ si dice **continua nell'intervallo $[a; b]$** se è continua in ogni punto dell'intervallo.

- Sono continue in ogni intervallo del loro dominio le funzioni razionali e irrazionali (intere e fratte), le funzioni esponenziali, le funzioni logaritmiche, le funzioni goniometriche.
- Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in un punto o in un intervallo, allora sono continue nello stesso punto o intervallo anche le funzioni:
$$f(x) \pm g(x), \quad kf(x), \text{ con } k \in \mathbb{R}, \quad f(x) \cdot g(x),$$
$$[f(x)]^n, \text{ con } n \in \mathbb{N} - \{0\}, \quad \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ con } g(x) \neq 0.$$
- Data una funzione composta $y = g(f(x))$, si può dimostrare che se $f(x)$ è continua nel punto x_0 e g è continua nel punto $f(x_0)$, allora $g(f(x))$ è continua in x_0.

TEORIA

Continuità della funzione inversa

Se $y = f(x)$ è una funzione iniettiva in un intervallo D, allora esiste la funzione inversa f^{-1}: $f(D) \to D$ definita nell'insieme immagine $f(D)$. Per essa vale il seguente teorema.

TEOREMA
Se $y = f(x)$ è una funzione iniettiva e continua in un intervallo D, allora la funzione inversa f^{-1} è continua in $f(D)$.

ESEMPIO
Calcoliamo $\lim_{x \to 0}(\arccos x + 4x)$.
La funzione $\cos x$ è continua in $\mathbb{R}$ e quindi la funzione $\arccos x$, inversa della restrizione di $\cos x$ all'intervallo $[0; \pi]$, è continua per tutti i valori di $[-1; 1]$, in particolare per $x = 0$. Quindi:

$$\lim_{x \to 0}(\arccos x + 4x) = \lim_{x \to 0} \arccos x + \lim_{x \to 0} 4x = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}.$$

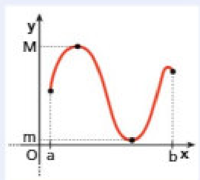
Teoremi sulle funzioni continue

→ Esercizi a p. 1556

Enunciamo, senza dimostrare, alcuni teoremi che esprimono proprietà importanti di cui godono le funzioni continue e ne illustriamo graficamente le conseguenze.
Data una funzione $y = f(x)$ definita nell'intervallo I, chiamiamo:

- **massimo assoluto** di $f(x)$, se esiste, il massimo M dei valori assunti dalla funzione in I;
- **minimo assoluto** di $f(x)$, se esiste, il minimo m dei valori assunti dalla funzione in I.

TEOREMA
Teorema di Weierstrass
Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.



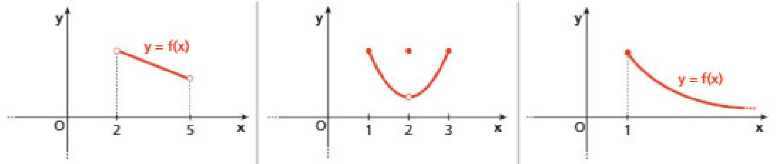
Listen to it
The **Weierstrass extreme value theorem** states that if f is continuous in $[a; b]$, then f must attain a maximum and a minimum in $[a; b]$.

Le ipotesi del teorema sono condizioni sufficienti per l'esistenza del massimo e del minimo assoluto, ma non sono necessarie. Per esempio, la funzione

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{se } -1\le x\le 0\\ x+1 & \text{se } 0<x\le 1\end{cases}$$

non è continua in $x=0$, ma assume il valore massimo in $x=1$ e il minimo in $x=0$.

Tuttavia, se alcune ipotesi del teorema non sono verificate, non è garantita l'esistenza del massimo assoluto e del minimo assoluto, come mostrano i seguenti controesempi.



a. La funzione è continua nell'intervallo limitato aperto]2; 5[. Essa è priva di massimo e minimo in questo intervallo, in quanto gli estremi non appartengono all'intervallo.

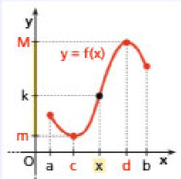
b. La funzione non è continua nel punto $x=2$. Nell'intervallo [1; 3] essa assume massimo, ma è priva di minimo.

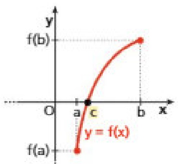
c. La funzione è continua nell'intervallo illimitato $[1; +\infty[$. In questo intervallo non vale il teorema di Weierstrass e la funzione è privadi minimo assoluto.

TEOREMA

Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.





TEOREMA

Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto $c \in]a; b[$ in cui f si annulla, ossia $f(c)=0$.

Ciò che afferma il teorema equivale a dire che, nelle ipotesi indicate, l'equazione $f(x)=0$ ha almeno una soluzione in $]a; b[$.

Video

Teoremi sulle funzioni continue

- Spieghiamo con l'aiuto dei grafici il teorema di Weierstrass, il teorema dei valori intermedi e il teorema di esistenza degli zeri.

ESEMPIO

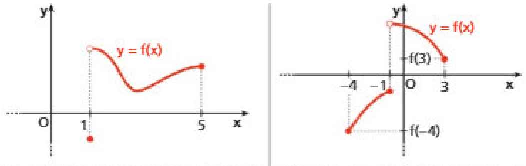
Consideriamo la funzione $f(x)=x+\log_2 x$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

La funzione è continua per $x>0$, quindi in particolare in $\left[\frac{1}{2};1\right]$. Inoltre:

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\log_2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0 \text{ e } f(1)=1+\log_2 1=1>0.$$

Sono verificate le ipotesi del teorema degli zeri, quindi l'equazione $f(x)=0$, e cioè $x+\log_2 x=0$, ha almeno una soluzione nell'intervallo $\left]\frac{1}{2};1\right[$.

Vediamo alcuni controesempi in cui non sono verificate tutte le ipotesi del teorema.



a. La funzione è continua nell'intervallo]1; 5], $f(1)<0$ e $f(5)>0$, ma non esiste alcun punto dell'intervallo in cui essa si annulla.

b. La funzione non è continua in $x=-1$; $f(-4)<0$ e $f(3)>0$. Non esiste alcun punto dell'intervallo $[-4; 3]$ in cui essa si annulla.

› Disegna il grafico di una funzione che non soddisfa tutte le ipotesi e per la quale è falsa la tesi dei teoremi:
- dei valori intermedi;
- di esistenza degli zeri.

7 Punti di discontinuità e di singolarità

→ Esercizi a p. 1560

$f(x)$, definita in x_0 e in un suo intorno, **non è continua** in x_0 se $\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

Diciamo anche che x_0 è un **punto di discontinuità** di $f(x)$.

È possibile classificare i punti di discontinuità di una funzione in tre categorie: di prima specie, di seconda specie e di discontinuità eliminabile.

Listen to it

If a function f is not continuous at a point x_0 in its domain, then f has a **discontinuity** in x_0.

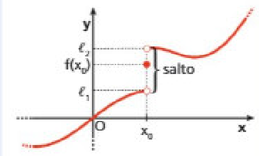
Punti di discontinuità di prima specie

DEFINIZIONE

Un punto x_0 del dominio di una funzione $f(x)$ è **punto di discontinuità di prima specie** per $f(x)$ quando, per $x\to x_0$, il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti ma diversi fra loro.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l_1\neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)=l_2.$$

La differenza $|l_2-l_1|$ è il **salto** della funzione.



Listen to it

The point x_0 is a **jump discontinuity** for f if the one-sided limits at x_0 exist and are finite but are not equal.

ESEMPIO

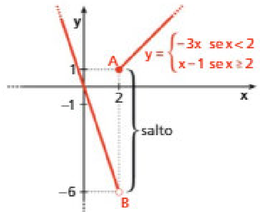
Consideriamo la funzione seguente:

$$f(x)=\begin{cases}-3x & \text{se } x<2\\ x-1 & \text{se } x\ge 2\end{cases}.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 2^+}(x-1)=1 \text{ e } \lim_{x\to 2^-}(-3x)=-6,$$

2 è un *punto di discontinuità di prima specie*. La distanza fra i punti A e B in figura è il salto e vale: $|1-(-6)|=7$.



› Verifica che 3 è punto di discontinuità di prima specie per $f(x)=\begin{cases}x & \text{se } x\ge 3\\ 1-x & \text{se } x<3\end{cases}$.

Listen to it

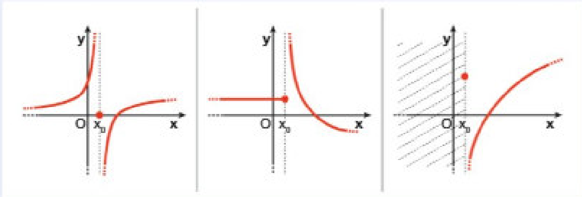
The point x_0 is an **infinite** or **essential discontinuity** for f if *one or both* of the one-sided limits at x_0 don't exist or are infinite.

TEORIA

Punti di discontinuità di seconda specie

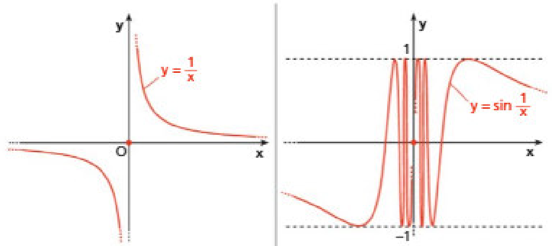
DEFINIZIONE

Un punto x_0 del dominio di una funzione $f(x)$ si dice **punto di discontinuità di seconda specie** per $f(x)$ quando per $x \to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.



> Disegna il grafico di una funzione che abbia discontinuità sia di prima specie sia di seconda specie.

Consideriamo gli esempi in figura.



a. Per la funzione $y = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ abbiamo:
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

b. La funzione $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ per $x \to 0$ non ammette né limite destro né limite sinistro. Infatti, $\lim_{x \to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ e $\sin \frac{1}{x}$ continua a oscillare tra -1 e 1 sia da destra sia da sinistra.

In entrambi i casi il punto x_0 è un *punto di discontinuità di seconda specie*.

Video

Punti di discontinuità

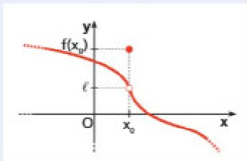
- Quando una funzione è continua?
- Cosa sono i punti di discontinuità?

Punti di discontinuità eliminabile

DEFINIZIONE

Un punto x_0 del dominio di una funzione $f(x)$ si dice **punto di discontinuità eliminabile** per $f(x)$ quando:

1. esiste ed è finito il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$, ossia $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$;
2. $f(x_0) \neq l$.



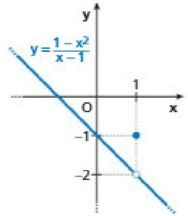
ESEMPIO

Consideriamo $f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

La funzione coincide con $y = -1 - x$ nell'insieme $\mathbb{R} - \{1\}$, come si può osservare nel grafico.

Calcoliamo il limite per $x \to 1$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(1-x)}(1+x)}{-\cancel{(1-x)}} = \lim_{x \to 1} -(1+x) = -2.$$



In $x = 1$, il valore della funzione è -1, quindi $\lim_{x \to 1} f(x) \neq f(1)$.

Il punto 1 è di **discontinuità eliminabile**, perché la funzione può essere modificata nel punto 1 in modo da risultare continua in tale punto:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \end{cases}.$$

Tale funzione è continua in $x = 1$, infatti $\lim_{x \to 1} f(x) = -2 = f(1)$.

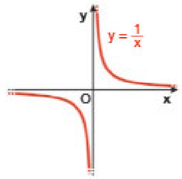
Punti singolari

I concetti esaminati finora in questo paragrafo possono essere estesi anche a punti che non appartengono al dominio della funzione, a condizione che siano punti di accumulazione.

Chiamiamo **punti singolari** (o **di singolarità**) sia questi punti sia i punti di discontinuità; per i punti singolari vale la stessa classificazione definita in precedenza per i punti di discontinuità.

ESEMPIO

1. Considerata la funzione
$$y = f(x) = \frac{1}{x},$$
il punto $x_0 = 0$ non è un punto di discontinuità perché x_0 non appartiene al dominio di $f(x)$. D'altra parte, abbiamo che
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$
come per la funzione già esaminata $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$, con discontinuità di seconda specie in $x = 0$.
Diciamo allora che $x_0 = 0$ è un *punto singolare di seconda specie* per entrambe le funzioni
$$y = \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}.$$



2. Data la funzione
$$f(x) = \frac{1-x^2}{x-1},$$
il punto $x_0 = 1$ non è un punto di discontinuità perché $f(x)$ non è definita in 1. Tuttavia 1 è un punto di accumulazione del dominio e, come già mostrato in un esempio precedente, esiste ed è finito il limite di $f(x)$ per $x \to 1$.
Diciamo quindi che $x_0 = 1$ è un *punto di singolarità eliminabile*.

> Determina il punto di singolarità eliminabile per la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

TEORIA

MATEMATICA E ARCHITETTURA

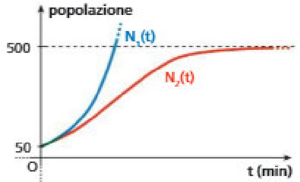
› Un limite da disastro

- Perché nei grattacieli si adottano forme aerodinamiche?

Risposta

TEORIA

Per comprendere meglio i due modelli, osserviamo l'andamento dei grafici delle loro funzioni: $N_1(t)$ è una funzione esponenziale, mentre $N_2(t)$ ha come asintoto orizzontale destro la retta di equazione $y = 500$. L'asintoto descrive l'andamento del grafico della funzione $N_2(t)$ per $t \to +\infty$.



Asintoti obliqui

→ Esercizi a p. 1566

DEFINIZIONE

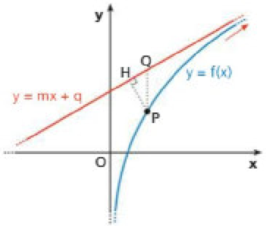
La retta di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, è **asintoto obliquo** per il grafico di una funzione $f(x)$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0.$$

Se la condizione è soddisfatta solo per $x \to +\infty$, parliamo di **asintoto obliquo destro**; se è soddisfatta solo per $x \to -\infty$, parliamo di **asintoto obliquo sinistro**.

La definizione è equivalente alla richiesta che la distanza tra il punto P del grafico di $f(x)$ e il punto Q della retta di equazione $y = mx + q$ con la stessa ascissa di P tenda a 0 per $x \to +\infty$ o $x \to -\infty$.

Dimostriamo, con questa definizione, che la distanza PH di P dall'asintoto tende a 0 quando x tende a $+\infty$.



Per la definizione di asintoto obliquo,

$$\lim_{x \to +\infty} \overline{PQ} = \lim_{x \to +\infty} |f(x) - (mx + q)| = 0,$$

ma, poiché PQ e HP sono rispettivamente l'ipotenusa e un cateto del triangolo rettangolo QHP, si ha: $\overline{PQ} > \overline{PH} > 0$.

Per il teorema del confronto: $\lim_{x \to +\infty} \overline{PH} = 0$.

Osservazione. Da $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx+q)] = 0$ ricaviamo $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (mx+q)$, da cui $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, condizione necessaria (ma non sufficiente) per l'esistenza dell'asintoto obliquo.

Ricerca degli asintoti obliqui

TEOREMA

Se il grafico della funzione $y = f(x)$ ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, con $m \neq 0$, allora m e q sono dati dai seguenti limiti:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx].$$

DIMOSTRAZIONE

Se esiste un asintoto obliquo destro, è vero che

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0,$$

e quindi, dividendo per $x \neq 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = 0 \to \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x}\right] = 0,$$

e, poiché $\lim_{x \to +\infty} m = m$ e $\lim_{x \to +\infty} \frac{q}{x} = 0$, deve essere:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Per ipotesi è $m \neq 0$, e per calcolare q consideriamo nuovamente:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0 \to \lim_{x \to +\infty} [(f(x) - mx) - q] = 0 \to$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] - q = 0 \to q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx].$$

Viceversa, si può dimostrare che se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ed esistono finiti i limiti $m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$, con $m \neq 0$, allora il grafico della funzione $y = f(x)$ presenta un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$.

Video

Asintoti

- Cos'è un asintoto?
- Come possiamo calcolarlo?

TEORIA

ESEMPIO

Determiniamo, se esiste, l'asintoto obliquo della funzione:

$$y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1}.$$

Essendo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la curva può avere un asintoto obliquo. Calcoliamo m:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} = 3.$$

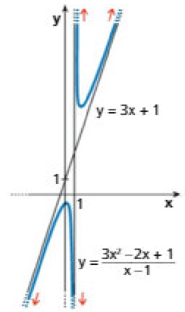
Calcoliamo q, sostituendo nella formula il valore 3 al posto di m:

$$q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 1}{x - 1} - 3x\right) =$$

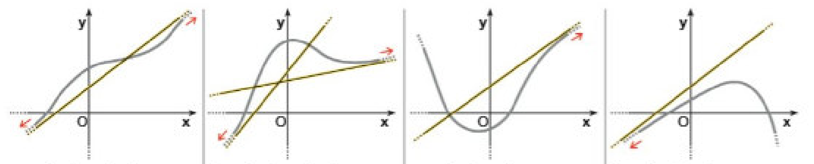
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1.$$

I calcoli svolti per $x \to +\infty$ valgono anche per $x \to -\infty$; quindi il grafico della funzione ha lo stesso asintoto obliquo, sia destro sia sinistro, di equazione:

$$y = 3x + 1.$$



Un asintoto obliquo si può avere sia per $x \to +\infty$ sia per $x \to -\infty$, oppure in uno solo dei due casi, come si può osservare negli esempi della figura seguente.



a. La funzione ha lo stesso asintoto obliquo per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

b. La funzione ha due asintoti obliqui diversi per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

c. La funzione ha un asintoto obliquo soltanto per $x \to +\infty$.

d. La funzione ha un asintoto obliquo soltanto per $x \to -\infty$.

TEORIA

Un caso particolare

Sia $f(x)$ una *funzione razionale fratta* $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ tale che $A(x)$ sia un polinomio di grado n e $B(x)$ un polinomio di grado $n-1$. Allora, effettuando la divisione tra i due polinomi, possiamo scrivere:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \to f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)},$$

dove $Q(x)$ è il quoziente, che è un polinomio di primo grado, e $R(x)$ è il resto, che è un polinomio di grado inferiore a $B(x)$. Quindi:

$$Q(x) = mx + q \text{ e } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{R(x)}{B(x)} = 0.$$

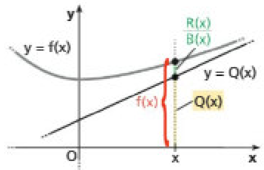
Essendo $f(x) = mx + q + \frac{R(x)}{B(x)}$, si ha che $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ è infinito, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$ e $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q$.

Allora, la retta di equazione $y = mx + q$, determinata dal quoziente tra $A(x)$ e $B(x)$, è un asintoto obliquo per il grafico di $f(x)$.

ESEMPIO

Consideriamo la funzione $f(x) = \frac{2x^4 - 2x + 1}{x^3 - 1}$.

Osserviamo che il grado del numeratore supera di una unità quello del denominatore, quindi la funzione ammette un asintoto obliquo, che troviamo eseguendo la divisione tra $A(x) = 2x^4 - 2x + 1$ e $B(x) = x^3 - 1$. Il quoziente è $Q(x) = 2x$ e il resto è $R(x) = 1$, quindi scriviamo



$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^3 - 1}$$

e la retta di equazione $y = 2x$ è un asintoto obliquo per il grafico di $f(x)$.

> Trova l'equazione dell'asintoto obliquo per la funzione $f(x) = \frac{x^3 - 10}{x^2 + 1}$.

Animazione nell'eBook

9 Grafico probabile di una funzione

→ Esercizi a p. 1571

Data una funzione $y = f(x)$, poiché siamo in grado di determinare molte sue caratteristiche, possiamo tracciare il suo grafico anche se solo in modo approssimato. Lo chiameremo **grafico probabile**.

Per rappresentare il grafico probabile di una funzione occorre:

1. determinare il dominio;
2. studiare eventuali simmetrie rispetto all'asse y o rispetto all'origine;
3. determinare le intersezioni del grafico con gli assi cartesiani;
4. studiare il segno;
5. calcolare i limiti agli estremi del dominio e studiare i punti di discontinuità o singolarità;
6. determinare gli eventuali asintoti.

TEORIA

IN SINTESI
Calcolo dei limiti e continuità

Operazioni sui limiti

- **Limite della somma e limite del prodotto**

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) + g(x)] = l + m,$$

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m.$$

lim $f(x)$	lim $g(x)$	lim $[f(x) + g(x)]$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

Se i limiti non sono entrambi finiti valgono i risultati delle tabelle.

I casi non indicati nelle tabelle corrispondono a forme indeterminate.

lim $f(x)$	lim $g(x)$	lim $[f(x) \cdot g(x)]$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

- **Limite della potenza $[f(x)]^n$**

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^n = l^n, \forall n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

- **Limite del quoziente**

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, con $l, m \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, allora:

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}.$$

Se $m = 0^+$ o $m = 0^-$ e $l \neq 0$, $\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ o $-\infty$, con segno dato dalla regola dei segni.

Se le funzioni non hanno entrambe limite finito, vale la tabella a fianco.

I casi non elencati portano a forme indeterminate.

lim $f(x)$	lim $g(x)$	lim $\frac{f(x)}{g(x)}$
l	$+\infty$	0
	$-\infty$	0
$+\infty$	$m > 0$, o $m = 0^+$	$+\infty$
	$m < 0$, o $m = 0^-$	$-\infty$
$-\infty$	$m > 0$, o $m = 0^+$	$-\infty$
	$m < 0$, o $m = 0^-$	$+\infty$

- **Limite della potenza $[f(x)]^{g(x)}$**

Se $\lim_{x \to \alpha} f(x) = l > 0$ e $\lim_{x \to \alpha} g(x) = m$, allora $\lim_{x \to \alpha} [f(x)]^{g(x)} = l^m$.

Per gli altri casi in cui non si abbia una delle forme indeterminate 1^∞, 0^0, ∞^0, il valore del limite si determina mediante le proprietà dell'esponenziale.

Forme indeterminate

- **Forme indeterminate:** $+\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

- **Forma indeterminata $+\infty - \infty$ (funzioni razionali)**

$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} a_0 x^n = \pm\infty$, secondo la regola dei segni del prodotto $a_0 x^n$.

- **Limite in forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ (funzioni razionali fratte con $n \geq 1$ e $m \geq 1$)**

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m} = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } n > m \\ \frac{a_0}{b_0} & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

e nel caso $n > m$ il segno del limite è dato dal prodotto dei segni $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} x^{n-m}$ e $\frac{a_0}{b_0}$.

continua »

TEORIA

Limiti notevoli

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;
- $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$.

Infinitesimi, infiniti e loro confronto

- Una funzione $f(x)$ è un:
  - infinitesimo, per $x\to\alpha$, se $\lim_{x\to\alpha}f(x)=0$;
  - infinito, per $x\to\alpha$, se $\lim_{x\to\alpha}f(x)=\pm\infty$.
- **Gerarchia degli infiniti**: $(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x$, con $\alpha,\beta>0$ e $a,b>1$.

Calcolo dei limiti di una successione

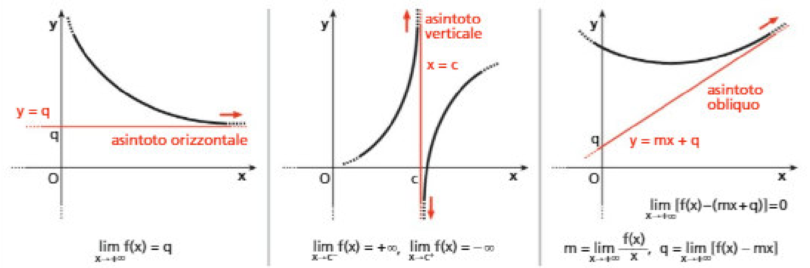
Nel calcolo del limite di una successione si procede come nel calcolo di limiti di funzioni per $x\to+\infty$.

Funzioni continue, punti di discontinuità e di singolarità

- $f(x)$ **continua in x_0**: $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$; **continua in $[a;b]$**: f è continua in ogni punto di $[a;b]$.
- Teorema di **Weierstrass**: f continua in $[a;b]\to\exists\, c,d\in[a;b] \mid f(c)=m,\ f(d)=M$, dove m e M sono il minimo e il massimo dell'insieme dei valori assunti dalla funzione quando x varia in $[a;b]$.
- Teorema dei **valori intermedi**: f continua in $[a;b]\to\forall\, k$: $m\le k\le M\ \exists\, x\in[a;b]$: $f(x)=k$.
- Teorema di **esistenza degli zeri**: f continua in $[a;b]$, $f(a)\cdot f(b)<0\to\exists\, c\in\,]a;b[$: $f(c)=0$.
- Un punto x_0 del dominio di $f(x)$ è un punto di:
  - **discontinuità di prima specie** se $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l_1\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x)=l_2$;
  - **discontinuità di seconda specie** se per $x\to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste;
  - **discontinuità eliminabile** se esiste ed è finito $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$ e $f(x_0)\neq l$.

  Se le condizioni sui limiti si applicano a un punto x_0 che *non appartiene* al dominio di $f(x)$, ma è un punto di accumulazione per esso, si parla di **punto di singolarità**.

Asintoti



ESERCIZI

Inquadrami per fare le attività interattive

1 Operazioni sui limiti

Limiti di funzioni elementari

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1487

AL VOLO **Calcola i seguenti limiti di funzioni elementari.**

1 $\lim_{x\to 2}5e^3$; $\quad\lim_{x\to-\infty}x^5$.

2 $\lim_{x\to 3}e^x$; $\quad\lim_{x\to-\infty}e^x$.

3 $\lim_{x\to 1}\ln x$; $\quad\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\sin x$.

4 $\lim_{x\to 0}\cos x$; $\quad\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\cos x$.

5 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\quad\lim_{x\to-\infty}4^x$.

6 $\lim_{x\to+\infty}\sin x$; $\quad\lim_{x\to 0^+}\log x$.

7 Spiega se ha senso calcolare i seguenti limiti e, in caso affermativo, calcolali.

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}$; $\quad\lim_{x\to-\infty}\log(-x)$; $\quad\lim_{x\to+\infty}(-2)^x$.

Limite della somma

→ Teoria a p. 1488

8 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo i limiti: **a.** $\lim_{x\to 1}(x+\ln x)$; **b.** $\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)$.

a. Abbiamo

$\lim_{x\to 1}x=1$ e $\lim_{x\to 1}\ln x=0$,

quindi per il teorema del limite della somma:

$\lim_{x\to 1}(x+\ln x)=1$.

b. Abbiamo

$\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$,

quindi:

$\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty$.

Calcola i limiti.

9 $\lim_{x\to-2}(2x^3+x^2)$ $\quad[-12]$

10 $\lim_{x\to-1}(x^4-x^3-4)$ $\quad[-2]$

11 $\lim_{x\to+\infty}(e^x+\ln x)$ $\quad[+\infty]$

12 $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x)$ $\quad[-\infty]$

13 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{2x+6}-x)$ $\quad[3]$

14 $\lim_{x\to e}(3-\ln x)$ $\quad[2]$

Limite del prodotto

→ Teoria a p. 1490

15 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: **a.** $\lim_{x\to 0^+}(x+1)\ln x$; **b.** $\lim_{x\to+\infty}x\frac{e^x}{2}$.

a. $\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$; $\quad\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Il segno dei due limiti è discorde, quindi:

$\lim_{x\to 0^+}(x+1)\ln x=-\infty$.

b. $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$.

Il segno dei due limiti è concorde, pertanto:

$\lim_{x\to+\infty}x\frac{e^x}{2}=+\infty$.

Calcola i limiti.

16 $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad[0]$

17 $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}(3-x)$ $\quad[0]$