1

TEORIA

Limiti notevoli

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$;
- $\lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$;
- $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$.

Infinitesimi, infiniti e loro confronto

- Una funzione $f(x)$ è un:
  - infinitesimo, per $x\to\alpha$, se $\lim_{x\to\alpha}f(x)=0$;
  - infinito, per $x\to\alpha$, se $\lim_{x\to\alpha}f(x)=\pm\infty$.
- **Gerarchia degli infiniti**: $(\log_a x)^\alpha < x^\beta < b^x$, con $\alpha,\beta>0$ e $a,b>1$.

Calcolo dei limiti di una successione

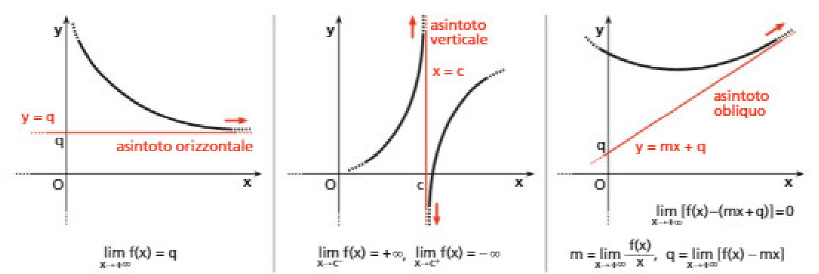
Nel calcolo del limite di una successione si procede come nel calcolo di limiti di funzioni per $x\to+\infty$.

Funzioni continue, punti di discontinuità e di singolarità

- $f(x)$ **continua in x_0**: $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$; **continua in $[a;b]$**: f è continua in ogni punto di $[a;b]$.
- Teorema di **Weierstrass**: f continua in $[a;b]\to\exists\, c,d\in[a;b]\,|\,f(c)=m,\ f(d)=M$, dove m e M sono il minimo e il massimo dell'insieme dei valori assunti dalla funzione quando x varia in $[a;b]$.
- Teorema dei **valori intermedi**: f continua in $[a;b]\to\forall\, k$: $m\le k\le M\ \exists\, x\in[a;b]$: $f(x)=k$.
- Teorema di **esistenza degli zeri**: f continua in $[a;b]$, $f(a)\cdot f(b)<0\to\exists\, c\in\,]a;b[$: $f(c)=0$.
- Un punto x_0 del dominio di $f(x)$ è un punto di:
  - **discontinuità di prima specie** se $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=l_1\neq\lim_{x\to x_0^+}f(x)=l_2$;
  - **discontinuità di seconda specie** se per $x\to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste;
  - **discontinuità eliminabile** se esiste ed è finito $\lim_{x\to x_0}f(x)=l$ e $f(x_0)\neq l$.

  Se le condizioni sui limiti si applicano a un punto x_0 che *non appartiene* al dominio di $f(x)$, ma è un punto di accumulazione per esso, si parla di **punto di singolarità**.

Asintoti



ESERCIZI

Inquadrami per fare le attività interattive

ESERCIZI

1 Operazioni sui limiti

Limiti di funzioni elementari

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1487

AL VOLO Calcola i seguenti limiti di funzioni elementari.

1 $\lim_{x\to 2}5e^3$; $\lim_{x\to-\infty}x^5$.

2 $\lim_{x\to 3}e^x$; $\lim_{x\to-\infty}e^x$.

3 $\lim_{x\to 1}\ln x$; $\lim_{x\to-\frac{\pi}{6}}\sin x$.

4 $\lim_{x\to 0}\cos x$; $\lim_{x\to\frac{3}{4}\pi}\cos x$.

5 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\lim_{x\to-\infty}4^x$.

6 $\lim_{x\to+\infty}\sin x$; $\lim_{x\to 0^+}\log x$.

7 Spiega se ha senso calcolare i seguenti limiti e, in caso affermativo, calcolali.

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x}$; $\lim_{x\to-\infty}\log(-x)$; $\lim_{x\to+\infty}(-2)^x$.

Limite della somma

→ Teoria a p. 1488

8 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo i limiti: **a.** $\lim_{x\to 1}(x+\ln x)$; **b.** $\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)$.

a. Abbiamo

$$\lim_{x\to 1}x=1 \text{ e } \lim_{x\to 1}\ln x=0,$$

quindi per il teorema del limite della somma:

$$\lim_{x\to 1}(x+\ln x)=1.$$

b. Abbiamo

$$\lim_{x\to-\infty}x^2=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty,$$

quindi:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-2x)=+\infty.$$

Calcola i limiti.

9 $\lim_{x\to-2}(2x^3+x^2)$ [-12]

10 $\lim_{x\to-1}(x^4-x^3-4)$ [-2]

11 $\lim_{x\to+\infty}(e^x+\ln x)$ [$+\infty$]

12 $\lim_{x\to-\infty}(-x^2+x)$ [$-\infty$]

13 $\lim_{x\to-1}(\sqrt{2x+6}-x)$ [3]

14 $\lim_{x\to e}(3-\ln x)$ [2]

Limite del prodotto

→ Teoria a p. 1490

15 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo: **a.** $\lim_{x\to 0^+}(x+1)\ln x$; **b.** $\lim_{x\to+\infty}x\frac{e^x}{2}$.

a. $\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1$; $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

Il segno dei due limiti è discorde, quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}(x+1)\ln x=-\infty.$$

b. $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$.

Il segno dei due limiti è concorde, pertanto:

$$\lim_{x\to+\infty}x\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Calcola i limiti.

16 $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\left(\sin x-\frac{\pi}{2}\right)$ [0]

17 $\lim_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}(3-x)$ [0]

18 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2-x}{3}(x^3-1)$ $[-\infty]$

19 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x$ $[+\infty]$

20 $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x^2)\,e^x$ $[-\infty]$

21 $\lim\limits_{x\to-\infty} (7-2x)^5(x^2+1)$ $[+\infty]$

Limite del quoziente

→ Teoria a p. 1492

22 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: **a.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x-1}$; **b.** $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{6x+1}{x+2}$.

a. Poiché $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x-1)=9$ e

$\lim\limits_{x\to 2}(x-1)=1$,

abbiamo

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x-1}=\frac{9}{1}=9.$$

b. $\lim\limits_{x\to-2^+}(6x+1)=-11$ e $\lim\limits_{x\to-2^+}(x+2)=0^+$.

Il numeratore tende a un numero negativo, mentre il denominatore tende a 0^+ (cioè resta sempre positivo); i limiti hanno segno discorde, pertanto:

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{6x+1}{x+2}=-\infty.$$

Calcola i limiti.

23 $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{4x+3}{x^2-4}$ $[-\infty]$

24 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2+\ln x}{1-\ln x}$ $[2]$

25 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2-2x+1}$ $[+\infty]$

26 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2-2x+1}$ $[0]$

27 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3}$ $[-\infty]$

28 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-2}{x^4}$ $[0]$

29 $\lim\limits_{x\to-7^+}\frac{\sqrt{2-x}+x}{7+x}$ $[-\infty]$

30 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(2+\sin x)}{\sin x}$ $[+\infty]$

31 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2+2x}$ $[0^+]$

Limite delle funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$

→ Teoria a p. 1494

Calcola i limiti.

32 $\lim\limits_{x\to 4}(\sqrt{x})^{\frac{1}{x-2}}$ $[\sqrt{2}]$

33 $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+3)^{\frac{1}{x}}$ $[+\infty]$

34 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x+\frac{1}{3}\right)^{-\frac{2}{x}}$ $[+\infty]$

35 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{x}$ $[0]$

36 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{2x+1}$ $[0]$

37 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$ $[+\infty]$

38 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}\right)^{-x}$ $[+\infty]$

39 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{2}{x^2}}$ $[+\infty]$

40 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin^2 x)^{\frac{1}{x}}$ $[0]$

Riepilogo: Operazioni sui limiti

41 VERO O FALSO?

Se $\lim\limits_{x\to c}f(x)=0^+$ e $\lim\limits_{x\to c}g(x)=-\infty$, allora:

a. $\lim\limits_{x\to c}\left[\frac{1}{f(x)}+\frac{1}{g(x)}\right]=+\infty$. V F

b. $\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=0$. V F

c. $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. V F

d. $\lim\limits_{x\to c}f(x)g(x)=-\infty$. V F

42 VERO O FALSO?

Se $\lim\limits_{x\to c}f(x)=-1$ e $\lim\limits_{x\to c}g(x)=-\infty$, allora:

a. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)]=-\infty$. V F

b. $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. V F

c. $\lim\limits_{x\to c}\frac{g(x)}{f(x)}=-\infty$. V F

d. $\lim\limits_{x\to c}[-f(x)-[g(x)]^2]=-\infty$. V F

43 TEST Se $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$, quanto vale

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{-e^{x-1}}$?

A 0 B $+\infty$ C $-\infty$ D 1

44 TEST Se $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}[f(x)\cdot\cos x]=2$, quanto vale

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}f(x)$?

A $2\sqrt{2}$ B 2 C 1 D $\frac{\sqrt{2}}{2}$

45 TEST Date le funzioni $f(x)=2x$ e $g(x)=1-x^2$, allora:

A $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

B $\lim\limits_{x\to-2}[f(x)\cdot g(x)]=-20$.

C $\lim\limits_{x\to 0^+}(g\circ f)(x)=2$.

D $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)-g(x)]=0$.

Calcola i limiti.

46 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{5}{x}\right)$ $[-\infty]$

47 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}\right)$ $[+\infty]$

48 $\lim\limits_{x\to-3}\log_3(24-x)$ $[3]$

49 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2-3x+3}$ $[3]$

50 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)$ $[0]$

51 $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{5x-2}{3-x}$ $[-\infty]$

52 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{6-3x}$ $[0]$

53 $\lim\limits_{x\to-2^{\pm}}\frac{x+1}{x+2}$ $[\mp\infty]$

54 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{x-2}{(2x-3)^2}$ $[-\infty]$

55 $\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$ $[+\infty]$

56 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}$ $[+\infty]$

57 $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\log_2 x+1}{3\log_4 x}$ $[1]$

58 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{x+\log_2 x}$ $[\sqrt{3}]$

59 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\log(\cos x)+\frac{1}{x}\right]$ $[+\infty]$

60 $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{\ln(x-3)}{1-x}$ $[+\infty]$

61 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x-\frac{1}{3x^3}\right)$ $[-\infty]$

62 $\lim\limits_{x\to 3}\cos\left(\frac{\log_3 x-1}{x+3}\right)$ $[1]$

63 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\log(x^2+x-5)}{2^x-1}$ $[0]$

64 $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{\sin x}$ $[-\infty]$

65 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-x+1}{2^{2x}-2^x+2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

66 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x+3}{5^x-1}$ $[+\infty]$

67 $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{e^{\cos x}+\sin x}{\sqrt{1+\tan x}}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

68 $\lim\limits_{x\to 1}\log(1-\log x)$ $[0]$

69 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\log_3 x+\log_3\frac{3}{x}}{x-2}$ $[1]$

70 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}$ $[0]$

71 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3^x\ln x}{2+x}$ $[-\infty]$

72 $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x\cdot 3^x\ln x)^2$ $[+\infty]$

73 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{e^{-x}}+\frac{2}{x}\right)$ $[+\infty]$

74 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{2^x}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\right)$ $[-\infty]$

75 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{1}{3}}x-xe^x\right)$ $[-\infty]$

76 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{\ln x}+\frac{1}{\cos x}\right)$ $[1]$

77 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arctan x+2x}{\cos x}$ $[0]$

78 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\log_2 x}{-x}$ $[+\infty]$

79 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\arcsin x}{x-1}$ $[-\infty]$

80 $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\pm}}e^{\frac{1}{\cos x}}$ $[0^+;+\infty]$

81 $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln\arccos x$ $[-\infty]$

82 $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\ln x$ $\left[-\frac{\pi}{2}\right]$

83 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{x}}$ $[0^+]$

84 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^x$ $[+\infty]$

85 $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ $[0^+]$

86 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{x-3}$ $[0^+]$

87 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}\right)^{-\frac{1}{\sin x}}$ $[0^+]$

88 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{e^{\frac{1}{x}}}$ $[+\infty]$

89 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+1)^{x^2}$ $[+\infty]$

90 $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln\arctan(x-1)}{3x}$ $[-\infty]$

91 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{1+\cos(x-1)}{4}\right]^{\frac{1}{1-x}}$ $[+\infty]$

92 $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1}{\tan\ln(x+2)}$ $[+\infty]$

93 $\lim\limits_{x\to 3^+}\left[\frac{\ln(x-3)}{\sqrt[3]{3-x}}-\frac{1}{3-x}\right]$ $[+\infty]$

94 $\lim_{x\to+\infty}(2^x-2)^{\arctan(2-x)}$ [0]

95 $\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x}{2x-1}\right)^{\frac{1}{\ln(x-2)}}$ $[0^+]$

96 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(e^{2x}+1)}{\ln(1-x)}$ [0]

97 $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)^{x-2}$ [0]

98 $\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x}{(x^2-x)\ln(1-x)}$ [0]

99 $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x-2}{e^{x-2}}\right)^{\frac{1}{x-2}}$ $[0^+]$

100 FISICA **MOTO RETTILINEO** Pietro percorre 30 km per andare al lavoro. Oggi ha impiegato complessivamente 1 ora tra andata e ritorno.

a. Qual è stata la sua velocità scalare media in km/h?

b. Dette v e w le velocità medie, in km/h, che ha mantenuto rispettivamente all'andata e al ritorno, verifica che $w=\frac{30v}{v-30}$, quindi calcola il valore a cui tende w quando v tende a 30^+.
Come interpreti questo risultato?

[a) 60 km/h; b) $w\to+\infty$]

Con i parametri

101 Trova per quale valore di a la funzione $f(x)=\begin{cases}2x^2-ax+1 & \text{se } x\le -1\\ \frac{ax-1}{x+2} & \text{se } x>-1\end{cases}$ ammette limite nel punto $x=-1$. $[a=-2]$

In 3 passi

1. Calcola il limite sinistro di $f(x)$: $\lim_{x\to-1^-}f(x)$.
2. Calcola il limite destro di $f(x)$: $\lim_{x\to-1^+}f(x)$.
3. Imponi che i due limiti siano uguali.

102 Date le costanti a, b e c, sia $f(x)=\begin{cases}ax^2+b & \text{se } x<4\\ c & \text{se } x=4\\ \sqrt{x} & \text{se } x>4\end{cases}$.
Trova, dandone completa giustificazione, le condizioni necessarie affinché esista $\lim_{x\to4}f(x)$.

(USA *Stanford University*, Math Final exam)

$[16a+b=2, c\in\mathbb{R}]$

Determina i valori di k che verificano i seguenti limiti.

103 $\lim_{x\to+\infty}k^{-x}=+\infty$ $[0<k<1]$

104 $\lim_{x\to+\infty}x^{k-2}=0$ $[k<2]$

105 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^4}\right)^{k^2+k}=0$ $[k<-1 \vee k>0]$

106 $\lim_{x\to0^+}(k^2-3)^{\frac{1}{x}}=+\infty$ $[k<-2 \vee k>2]$

107 $\lim_{x\to+\infty}(k^2-8)^x=0$ $[-3<k<-2\sqrt{2} \vee 2\sqrt{2}<k<3]$

Con il teorema del confronto

108 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\cos x}{x}$.

Il numeratore della funzione $\frac{3+\cos x}{x}$, se $x\to+\infty$, non ammette limite, quindi non possiamo applicare i teoremi sul calcolo dei limiti.

Osserviamo che $-1\le\cos x\le1$. Se aggiungiamo 3 a tutti i termini, si ha: $2\le3+\cos x\le4$

e quindi, per $x>0$: $\frac{2}{x}\le\frac{3+\cos x}{x}\le\frac{4}{x}$.

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$, per il teorema del confronto: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\cos x}{x}=0$.

Utilizzando il teorema del confronto, calcola i seguenti limiti.

109 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$ [0]

110 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x}{x}$ [0]

111 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3+\sin x}$ $[+\infty]$

112 $\lim_{x\to-\infty}e^{2x}\sin x$ [0]

113 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{x^2}$ [0]

114 $\lim_{x\to+\infty}3^x(\sin x+2)$ $[+\infty]$

115 $\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$ [0]

116 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2+1}$ [0]

117 $\lim_{x\to+\infty}e^{-x}\cos x$ [0]

118 $\lim_{x\to+\infty}(\sin x+3)x$ $[+\infty]$

119 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2+\sin x}$ $[+\infty]$

120 $\lim_{x\to+\infty}(\sin x-3x)$ $[-\infty]$

121 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{1+e^x}$ [0]

122 $\lim_{x\to+\infty}(x^2+3\cos x)$ $[+\infty]$

123 $\lim_{x\to0}x^2\cos\frac{1}{x}$ [0]

124 $\lim_{x\to+\infty}(e^x+\cos^2x)$ $[+\infty]$

125 $\lim_{x\to+\infty}x^3(\cos x-3)$ $[-\infty]$

126 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\cos x}{\ln x}$ [0]

127 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{(x+4)^2}$ [0]

128 $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(\sin x+2)$ $[+\infty]$

129 FISICA **MOTO ARMONICO SMORZATO** Un pendolo oscilla con un moto armonico smorzato; se x è l'angolo tra la fune del pendolo e la verticale, la legge oraria è:

$$x(t)=\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{\tau}}\cos 6t,$$

dove x è espresso in rad, t in s ($t\ge0$) e τ è la costante temporale di smorzamento.

a. Sapendo che dopo 10 secondi l'ampiezza di oscillazione $A(t)=\frac{1}{5}e^{-\frac{t}{\tau}}$ si dimezza, determina il valore di τ.

b. Calcola a cosa tende $x(t)$ al passare del tempo (cioè per $t\to+\infty$).

[a) 14 s; b) $\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$]

2 Forme indeterminate

130 TEST Solo una fra le seguenti è una forma indeterminata. Quale?

A $\frac{0}{\infty}$ B $0\cdot\infty$ C 0^{∞} D $(+\infty)^{-\infty}$

131 ASSOCIA ciascun limite alla forma indeterminata corrispondente.

a. $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x^3-1}$ b. $\lim_{x\to+\infty}x^4-3x$ c. $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{x}}$ d. $\lim_{x\to0^+}x\cdot\log x$

1. $+\infty-\infty$ 2. 0^0 3. $\frac{\infty}{\infty}$ 4. $0\cdot\infty$

Forma indeterminata $+\infty-\infty$

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1495

132 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: a. $\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3)$; b. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+7}-\sqrt{x})$.

a. Poiché $\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ e $\lim_{x\to-\infty}(2x^2-3)=+\infty$, abbiamo la forma indeterminata $-\infty+\infty$.

Raccogliamo a fattor comune x^3:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3)=\lim_{x\to-\infty}\Big[\underbrace{\boxed{x^3}}_{\text{tende a }-\infty}\cdot\Big(1+\overbrace{\boxed{\tfrac{2}{x}}}^{\text{tende a 0}}-\underbrace{\boxed{\tfrac{3}{x^3}}}_{\text{tende a 0}}\Big)\Big]=-\infty.$$

b. Poiché $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+7}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$, abbiamo la forma indeterminata $+\infty-\infty$.

Scriviamo la funzione $f(x)=\sqrt{x+7}-\sqrt{x}$ in modo che compaia la somma delle radici anziché la differenza, moltiplicando e dividendo $f(x)$ per $(\sqrt{x+7}+\sqrt{x})$:

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x}=(\sqrt{x+7}-\sqrt{x})\cdot\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}=\frac{(x+7)-x}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}=\frac{7}{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+7}-\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{\underbrace{\boxed{\sqrt{x+7}+\sqrt{x}}}_{\text{tende a }+\infty}}=0.$$

Calcola i limiti.

133 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^4-x^2-9)$ $[+\infty]$

134 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^5+3x^2-x+3)$ $[+\infty]$

135 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^3+x^2}{2}$ $[-\infty]$

136 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^7+\dfrac{1}{2}x+1\right)$ $[-\infty]$

137 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-2x)^3$ $[-\infty]$

138 $\lim\limits_{x\to-\infty}-\dfrac{1}{2}x^2(x^2-x^3+1)$ $[-\infty]$

139 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2})$ $[0]$

140 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+2}}$ $[-\infty]$

141 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1-2x}-\sqrt{3-2x})$ $[0]$

142 $\lim\limits_{x\to-\infty}(-3x^3+2x^2-x)$ $[+\infty]$

143 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4})$ $[0]$

144 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x-5}}{2}$ $[0]$

145 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{3x+1}$ $[0]$

146 $\lim\limits_{x\to-\infty}(4x+\sqrt{16x^2-1})$ $[0]$

147 EUREKA! $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}-x)$ $[-\infty]$

148 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{-x^4+x^2}$ $[0^-]$

149 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{-x}}{-2x^4+4x+1}$ $[0]$

150 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x})$ $[+\infty]$

151 $\lim\limits_{x\to-\infty}\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}x^2-x\right)$ $[-\infty]$

152 $\lim\limits_{x\to-\infty}4^{x^3+x^2}$ $[0]$

153 $\lim\limits_{x\to0^+}[\ln x-\ln(x^2+x)]$ $[0^-]$

154 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x+1}-e^{4x})$ $[-\infty]$

In 3 passi

1. Verifica che il limite è una forma indeterminata.
2. Raccogli e^{4x}.
3. Calcola il limite del prodotto.

155 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{2}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$ $[+\infty]$

156 $\lim\limits_{x\to1^+}[2\ln(x-1)-\ln(x^2-x)]$ $[-\infty]$

Forma indeterminata $0\cdot\infty$

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1496

157 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim\limits_{x\to0^+}(\sin 2x\cdot\cot x)$.

Poiché $\lim\limits_{x\to0^+}\sin 2x=0$ e $\lim\limits_{x\to0^+}\cot x=+\infty$, abbiamo la forma indeterminata $0\cdot\infty$.

Con le formule goniometriche, trasformiamo $\sin 2x$ e $\cot x$ per semplificare l'argomento del limite:

$$\sin 2x\cdot\cot x=2\sin x\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=2\cos^2 x.$$

Quindi:

$$\lim_{x\to0^+}(\sin 2x\cdot\cot x)=\lim_{x\to0^+}(2\cos^2 x)=2\cdot1=2.$$

Calcola i limiti.

158 $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}\pi}\sin^2\left(\dfrac{3}{2}\pi-x\right)\tan^2 x$ $[1]$

159 $\lim\limits_{x\to0}(2-\cot x)\tan x$ $[-1]$

160 $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos 2x)\dfrac{x+1}{\sin x}$ $[0]$

161 $\lim\limits_{x\to0^+}(2\cot x+3\cos x)\sin 2x$ $[4]$

162 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2}{3-3x^2}(\sqrt{2-x}-1)$ $\left[\dfrac{1}{6}\right]$

163 $\lim\limits_{x\to3^-}(x^2-9)\sqrt{\dfrac{2x^3}{3-x}}$ $[0]$

164 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{4}}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

165 $\lim\limits_{x\to1^+}(\sqrt{2+x}-\sqrt{3})\dfrac{6}{(x-1)^2}$ $[+\infty]$

Forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1496

166 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo: **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^4+2x}{x^2-2}$; **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+6x^3}{x^3-x}$; **c.** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-x^2}{x^3+1}$.

a. Raccogliamo a fattor comune le potenze di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(-1+\frac{2}{x^3}\right)}{x^2\cdot\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\boxed{x^2}}_{\text{tende a }+\infty}\cdot\overbrace{\boxed{\frac{-1+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}}}}^{\text{tende a }-1}\right)=-\infty.$$

b. Ordiniamo il numeratore e il denominatore secondo il grado decrescente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^3+1}{x^3-x}.$$

Raccogliamo a fattor comune i monomi di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cdot\left(6+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\overbrace{\boxed{6+\frac{1}{x^3}}}^{\text{tende a 6}}}{\underbrace{\boxed{1-\frac{1}{x^2}}}_{\text{tende a 1}}}=6.$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0 & \text{se } n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{se } n=m\\ \pm\infty & \text{se } n>m\end{cases}$$

il segno è dato dalla regola dei segni di $\dfrac{a_0}{b_0}\cdot\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\(x\to-\infty)}}x^{n-m}$

c. Ordiniamo il numeratore e il denominatore secondo il grado decrescente:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+2x}{x^3+1}.$$

Raccogliamo a fattor comune le potenze di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(-1+\frac{2}{x}\right)}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\text{tende a 0}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{-1+\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^3}}}}_{\text{tende a }-1}=0\cdot(-1)=0.$$

Calcola i limiti.

167 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^6-3x^4}{2x^2-2x+1}$ $[+\infty]$

168 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1+x^5}{3x^2-2x+1}$ $[+\infty]$

169 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+6}{3x^2-2x+x^3}$ $[3]$

170 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-6x^4+3x^6}{7x^5+4x^3-2x}$ $[-\infty]$

171 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-3x^4-27}{7+4x^3+x}$ $[+\infty]$

172 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-6x^3+x^2}{x^2-3x^3}$ $[2]$

173 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+x+4x^3}{x^5-x^2}$ $[0]$

174 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3+x^4}{x^5-6x^2}$ $[2]$

175 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+1)^2}{(6x-5)^2}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

176 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4x^3+1)^2}{-2x^6+3x^2}$ $[-8]$

177 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x^2(4x^4-5)}{(3-2x^2)^3}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

178 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{-x^3+2x}{x^2-1}}$ $[0^+]$

179 $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2-x}{x^4-x^3+1}$ $[-\infty]$

180 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}+e^x-1}{e^x+4}$ $[+\infty]$

181 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2^x+1)^2}{4^x}$ $[1]$

182 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2-2x}{4x^2+1}\right)^x$ $[+\infty]$

Determina per quali valori di $n\in\mathbb{N}$ sono verificati i seguenti limiti.

183 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^n-1}=2$

184 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{4-x^n}=0$

185 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x+x^n}{x^3+1}=+\infty$

186 Calcola $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{3x-x^\alpha}$ al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$. $[\alpha\le1:+\infty; 1<\alpha<2:-\infty; \alpha=2:-3; \alpha>2:0]$

187 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$.

Osserviamo che per x che tende a $-\infty$ il numeratore tende a $+\infty$, mentre il denominatore tende a $-\infty$ e quindi il limite è nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Raccogliamo a fattor comune i termini in x di grado massimo all'interno della radice e al denominatore:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}.$$

Portare fuori da una radice quadrata:

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x \text{ se } x\ge0,\\ -x \text{ se } x<0.\end{cases}$$

Poiché x tende a $-\infty$, possiamo supporre $x<0$, quindi abbiamo $|x|=-x$.

Il limite perciò diventa:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overbrace{\boxed{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}^{\text{tende a }-1}}{\underbrace{\boxed{\left(2-\frac{1}{x}\right)}}_{\text{tende a }2}}=-\frac{1}{2}.$$

Calcola i limiti.

188 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-3}}{x+1}$ $[2]$

189 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+8}}{2x+1}$ $[1]$

190 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2}}{x-2}$ $[0]$

191 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3x-1}}{x^2+x-1}$ $[0]$

192 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-x+1}}$ $[-3]$

193 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}{3x}$ $[0]$

194 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+2}-\sqrt{4x^2-1}}{x}$ $[-1]$

195 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4-x}}{x^2-4x}$ $[0]$

196 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{x}-x^2}{x(3x-1)}$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

197 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ $[+\infty]$

198 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{16x^2+x+4}}{2x+3}$ $[-2]$

199 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2-1}}$ $[2]$

200 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+2}{\sqrt{2x^2+1}}$ $[+\infty]$

201 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2-1}{4+x^2}\sqrt{\dfrac{2-3x}{1-12x}}$ $\left[\dfrac{5}{2}\right]$

202 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x-4}-x)$ $[1]$

203 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x+1}-\sqrt{x^2-2x})$ $[3]$

204 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x)$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

205 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+2x^2-1}{\sqrt{x^6+3x^2+2}}$ $[-1]$

206 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4+5x^2}}{(x+2)^2}$ $[3]$

207 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}+2x}{8x-4}$ $\left[\dfrac{1}{8}\right]$

208 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x)$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$
Utilizza: $A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$.

209 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-x}}{x}$ $[0]$

210 YOU & MATHS Find $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$. (USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*) $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

Forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1498

211 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^3-x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}$.

Calcolando il limite del numeratore e del denominatore, otteniamo la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$.

Poiché 2 è uno zero sia del numeratore sia del denominatore, scomponiamo in fattori. Per il numeratore usiamo la regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & -1 & -5 & -2\\ 2 & & 4 & 6 & 2\\ \hline & 2 & 3 & 1 & 0\end{array}\quad\to\quad 2x^3-x^2-5x-2=(x-2)(2x^2+3x+1).$$

Scomponendo il denominatore abbiamo: $2x^2-5x+2=(x-2)(2x-1)$.
Calcoliamo il limite:

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^3-x^2-5x-2}{2x^2-5x+2}=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(2x^2+3x+1)}{\cancel{(x-2)}(2x-1)}=\lim_{x\to2}\frac{2x^2+3x+1}{2x-1}=5.$$

Calcola i limiti.

212 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{3x^2-3x}$ $[0]$

213 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+x-10}{x^2-5x-14}$ $\left[\dfrac{11}{9}\right]$

214 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x-2}{x^2+2x}$ $\left[\dfrac{5}{2}\right]$

215 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-x^6}{x^6-x^7}$ $[2]$

216 $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{x-4}{x^2-8x+16}$ $[+\infty]$

217 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^4-1}$ $\left[\dfrac{3}{4}\right]$

218 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\dfrac{2x^2+9x-5}{4x^2-4x+1}$ $[+\infty]$

219 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3+2x^2-8x}{x^3-2x^2+2x-4}$ $[2]$

220 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4-4x^2}{x^3-x^2-2x}$ $\left[\dfrac{8}{3}\right]$

221 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4+2x^3-2x-1}{x^2+2x+1}$ $[0]$

222 $\lim\limits_{x\to-3^-}\dfrac{x^2+x-6}{x^3+6x^2+9x}$ $[-\infty]$

223 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+6x^2+12x+8}{x^2+4x+4}$ $[0]$

224 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 1}$ $[-2]$

225 $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 27}$ $\left[-\frac{1}{9}\right]$

226 $\lim_{x \to -1} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - x^2 - 2x}$ $[3]$

227 $\lim_{x \to 2} \ln \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$ $[0]$

228 $\lim_{x \to 0} e^{\frac{x^6 - x^5}{x^4 - x^3}}$ $[1]$

229 $\lim_{x \to 2^+} \left[\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 4x + 4} + \frac{2x^2 - 8}{(x-2)^2}\right]$ $[+\infty]$

230 $\lim_{x \to -2} \frac{2x^3 + 5x^2 - x - 6}{2x^2 + 3x - 2}$ $\left[-\frac{3}{5}\right]$

231 $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + x - 2}\right)^{\frac{1}{1-x}}$ $[+\infty]$

232 Determina per quali valori di a esiste finito

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - a}.$$

$[a = 2 \vee a = -4]$

233 Trova a e b in modo che:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 8.$$

$[a = 2, b = -15]$

234 TEST Qual è il limite per $a \to 0^+$ della più grande delle due radici dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, dove a, b, c sono numeri reali e $b > 0$?

A $+\infty$

B $-\infty$

C $-\frac{c}{b}$

D $4c$

E Nessuno dei precedenti.

(USA tratto da *University of North Georgia Mathematics Tournament*)

Calcola i limiti.

235 $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x^2 - x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

In 3 passi

1. Verifica che il limite è una forma indeterminata.
2. Razionalizza il numeratore e scomponi il denominatore.
3. Semplifica e calcola il limite.

236 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{3x}$ $\left[\frac{1}{12}\right]$

237 $\lim_{x \to 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

238 $\lim_{x \to 4^+} \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 16}}$ $[0]$

239 $\lim_{x \to 3} \frac{3x - 9}{\sqrt{6+x} - 3}$ $[18]$

240 $\lim_{x \to 5^+} \frac{\sqrt{x^2 - 5x}}{\sqrt{x^2 - 25}}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

241 $\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x}}$ $[+\infty]$

242 $\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{3 - \sqrt{8 - x^3}}$ $[-1]$

243 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 9} - 3}{x - 2}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

244 $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^2} - \sqrt{4+x^2}}$ $[4]$

245 $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^3 + 1}}{2x - x^2}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

Forme indeterminate 0^0, ∞^0, 1^∞

Attività interattiva

→ Teoria a p. 1499

246 RIFLETTI SULLA TEORIA Riconosci quali fra i seguenti limiti presentano una forma indeterminata.

$\lim_{x \to 0^+} 1^{\frac{1}{x}}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$; $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2}{1-x}\right)^x$; $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x+1}}$; $\lim_{x \to -\infty} (x^2)^x$.

247 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$.

Per $x \to 0^+$ si ha $\ln x \to -\infty$, quindi $\frac{1}{\ln x} \to 0^-$, perciò abbiamo la forma indeterminata 0^0.

Usiamo l'identità scritta a fianco:

$f(x)^{g(x)} = e^{\ln f(x)^{g(x)}}$ con $f(x) > 0$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}} = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot \cancel{\ln x}} = \lim_{x \to 0^+} e^1 = e.$$

Osservazione. Anche forme indeterminate dei tipi ∞^0 e 1^∞ possono essere risolte utilizzando la proprietà $a = e^{\ln a}$, con $a > 0$.

Calcola i limiti.

248 $\lim_{x \to 0^+} (2x)^{\frac{2}{\ln 2x}}$ $[e^2]$

249 $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e]$

250 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{3\ln x}}$ $\left[e^{\frac{2}{3}}\right]$

251 $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{-3}{\ln x}}$ $\left[\frac{1}{e^3}\right]$

252 $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{\ln^2 x^2}}$ $[1]$

253 $\lim_{x \to 0^+} x^{-\frac{1}{\ln x^2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

254 $\lim_{x \to +\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$ $[e]$

255 $\lim_{x \to 0^+} x^{\frac{2}{\ln^2 x}}$ $[1]$

256 $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{1 + \ln x}}$ $[e]$

Riepilogo: Forme indeterminate

257 TEST Fra i seguenti limiti, solo uno è una forma indeterminata. Quale?

A $\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$ B $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^3}$ C $\lim_{x \to -\infty} (2x^2 + x^3)$ D $\lim_{x \to 0} (x^2 - 3x^3)$

258 TEST Quale, fra i seguenti limiti, si presenta in forma indeterminata?

A $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} x\tan x$ B $\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x}$ C $\lim_{x \to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$ D $\lim_{x \to +\infty} x^2 \sin x$

Calcola i limiti.

259 $\lim_{x \to +\infty} (x + 2x^3 - x^2)$ $[+\infty]$

260 $\lim_{x \to -\infty} (-x^4 - x^3 + x^6 - x)$ $[+\infty]$

261 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}$ $[+\infty]$

262 $\lim_{x \to -3^+} \frac{x + 3}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18}$ $[-\infty]$

263 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 5x^3 + x^2}{2x^3 + 4x^2 - x}$ $\left[-\frac{5}{2}\right]$

264 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x^3 + x^4}{x^5 + x^3 - 2x}$ $[0]$

265 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x^3 + 5}{2x^2 - 3x^3 + 1}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

266 $\lim_{x \to -3^-} \frac{x + 3}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$ $[+\infty]$

267 $\lim_{x \to -\infty} \frac{x - 2x^3 + x^5 + x^7}{x^2 - 2x^4 + 10x^6}$ $[-\infty]$

268 $\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$ $[+\infty]$

269 $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2x^3 + x^4}{2x^3 - x}$ $[+\infty]$

270 $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4x}{x^3 - x^2 - 2x}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

271 $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)^x$ $[+\infty]$

272 $\lim_{x \to -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 2})$ $[0]$

273 $\lim_{x\to+\infty}(3x-\sqrt{9x^2+1})$ [0]

274 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x}$ [$-\infty$]

275 $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{x^2-8}}{6x+7}$ [$-\frac{1}{3}$]

276 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-\sqrt{3+4x^2}}$ [$-\infty$]

277 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+\sqrt[3]{x^3+2x}}$ [$+\infty$]

278 $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$ [$+\infty$]

279 $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+2}{x-\sqrt{x^2-3}}$ [4]

280 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+\sqrt{3+x^4}}$ [0]

281 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+1}{x+2}\right)^{x^3+4x^2}$ [0^+]

282 $\lim_{x\to5^-}\frac{x^2-10x+25}{x^3-9x^2+15x+25}$ [$\frac{1}{6}$]

283 $\lim_{x\to+\infty}[\log_2(x^2+1)-2\log_2 x]$ [0]

284 $\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ [2]

285 $\lim_{x\to8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ [$\frac{1}{12}$]

286 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2+x}}{x}$ [$-\frac{\sqrt{2}}{2}$]

287 $\lim_{x\to-2}e^{\frac{x^2-4}{x+2}}$ [e^{-4}]

288 $\lim_{x\to\pm\infty}\log_2\left(\frac{x+1}{x}\right)$ [0]

289 $\lim_{x\to+\infty}\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ [-1]

290 $\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{\sin x}$ [0]

291 $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+4x}\right)$ [$+\infty$]

292 $\lim_{x\to+\infty}4^{\sqrt{x-4}-\sqrt{x}}$ [1^-]

293 $\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{1}{x^4-x^3}$ [$-\infty$]

294 $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3^x}-1}{9^x-1}$ [$\frac{1}{4}$]

295 $\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2-x^2}{3-x}$ [$+\infty$]

296 $\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{x^2-2}{-2x+1}}$ [0^+]

297 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{\ln x+1}$ [$+\infty$]

298 $\lim_{x\to2}\left(\sqrt{\log 5x}-\frac{x^2-4}{x-2}\right)$ [-3]

299 $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2-2^{\frac{x-1}{x}}}$ [$+\infty$]

300 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{2}}$ [$\sqrt{2}$]

301 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[(1-\sin x)\cdot\frac{1}{\cos x}\right]$ [0]

302 $\lim_{x\to\pi}\left[(\cos x+1)\cdot\frac{1}{\sin x}\right]$ [0]

303 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x-2^{3+2x}}$ [0^-]

304 $\lim_{x\to-\infty}(2x^2+x)^x$ [0^+]

305 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-x}\right)^{2x-x^2}$ [$+\infty$]

306 $\lim_{x\to\pm\infty}\arcsin\frac{1+x^2}{2x^2}$ [$\frac{\pi}{6}$]

307 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^{x-1}$ [0^+]

308 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2-x}{x+1}\right)^{x^2}$ [$+\infty$]

309 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)^{-\ln x}$ [0^+]

310 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-2}{x+1}\right)^{\frac{x-1}{2x}}$ [$\sqrt{3}$]

311 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\arcsin 2^x}{2^{-x}}+\ln\frac{2+x}{x}\right)$ [0]

312 $\lim_{x\to+\infty}(\log_{\frac{1}{3}}x-x\cdot 3^{x+2})$ [$-\infty$]

313 $\lim_{x\to-\infty}\ln\arctan\frac{x-2}{1-x^2}$ [$-\infty$]

314 $\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{2^x+3}{2^{3-x}}$ [$-\infty$]

315 $\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)^2}{(3x-1)^2}$ [$\frac{1}{9}$]

316 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x-1)-\ln 3x}{3x-1}$ [0]

317 $\lim_{x\to0^+}\frac{2\ln x-3}{12-\ln x}$ [-2]

318 $\lim_{x\to+\infty}\arcsin\frac{1-e^x}{2e^x+1}$ [$-\frac{\pi}{6}$]

319 $\lim_{x\to3^-}\frac{\ln(3-x)}{x^3-x^2-6x}$ [$+\infty$]

320 $\lim_{x\to+\infty}\log_2\left(\frac{x^2-8x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1+2x}{x}}$ [6]

321 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{1+4x}\right)^{-x^2+3x}$ [$+\infty$]

322 $\lim_{x\to2}\log_2\frac{\sqrt{x^2+12}-4}{3x^2-4x-4}$ [-4]

323 $\lim_{x\to-1}\log_9\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$ [$-\frac{1}{2}$]

324 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-\sqrt{x^2-1}}{4x-1}$ [se $x\to+\infty$: $\frac{1}{4}$; se $x\to-\infty$: $\frac{3}{4}$]

325 Considera la funzione $y=\frac{x^3+6x^2}{x^3+6x^2-9x-54}$ e calcola i limiti per:

a. $x\to-6$; **b.** $x\to-\infty$; **c.** $x\to3^-$.

[a) $\frac{4}{3}$; b) 1; c) $-\infty$]

326 Considera la funzione $y=\frac{-3x^3-15x^2}{x^3+5x^2-4x-20}$ e calcola i limiti della seguente funzione per:

a. $x\to+\infty$; **b.** $x\to2^+$.

[a) -3; b) $-\infty$]

327 Data la funzione $f(x)$ tale che $\frac{x}{x^2+1}\le f(x)\le\frac{2}{\ln x+1}$, quanto vale $\lim_{x\to+\infty}f(x)$? [0]

328 **VERO O FALSO?** Se $n>3$, allora:

a. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^n-1}=1$. V F

b. $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+3}{nx+1}=0$. V F

c. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n+1}{2x-3x^2}=+\infty$. V F

d. $\lim_{x\to-\infty}\frac{nx+1}{x}=n$. V F

329 **TEST** Indica per quale valore di $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to1}\frac{-3x^2+a^2x+2a}{x^2-1}=-\frac{5}{2}.$$

A -3 **B** 1 **C** $-\frac{5}{2}$ **D** 2

330 **TEST** Indica per quale valore di k si ha:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^{2k-1}-4x+8}{-2x^{k+1}-3}=-3.$$

A -2 **B** 2 **C** 1 **D** 3

331 Data la funzione $f(x)=\frac{x-1}{2a-x^2}$, determina per quale valore di a si ha $\lim_{x\to-1^\pm}f(x)=\pm\infty$. [$a=\frac{1}{2}$]

332 Considera $f(x)=\frac{3ax^2+1}{bx-x^2}$. Trova i valori di a e b per cui: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$ e $\lim_{x\to1^\pm}f(x)=\pm\infty$. [$a=\frac{1}{3}$; $b=1$]

333 Trova a e b in modo che $\lim_{x\to-3}f(x)=1$, con $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x+3}$. [$a=7$; $b=12$]

334 Determina a e b tali che la funzione $f(x)=2^{\frac{ax}{x+2b}}$ abbia $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to1^+}f(x)=0$. [$a=-1$; $b=-\frac{1}{2}$]

8

COMPLETA

335 $\lim_{x\to\square}\frac{x-1}{x^2-5x+6}=+\infty$ $[2^-;3^+]$

336 $\lim_{x\to\square}2^{\frac{-x^2}{x-2}}=0$ $[2^+;+\infty]$

337 $\lim_{x\to\square}\frac{x-5x^2}{2x-x^2}=-\infty$ $[2^-]$

338 $\lim_{x\to\square}\ln\frac{2x+1}{x^2-x}=+\infty$ $[0^-;1^+]$

339 $\lim_{x\to\square}\ln\frac{2x+1}{x^2-x}=-\infty$ $\left[-\frac{1}{2}^+;+\infty\right]$

340 $\lim_{x\to\square}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|=-\infty$ $[0]$

341 $\lim_{x\to\square}3^{\frac{x^3}{x^2-4}}=+\infty$ $[-2^+;2^+;+\infty]$

342 $\lim_{x\to\square}\ln\frac{x^2-x}{x+1}=-\infty$ $[0^+;1^+]$

EUREKA!

343 Discuti, al variare di $k\in\mathbb{R}$, il valore di

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x-1}+k\sqrt{x}.$$

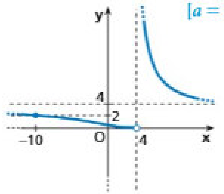
$[k<-\sqrt{2}:-\infty;\ k=-\sqrt{2}:0;\ k>-\sqrt{2}:+\infty]$

344 Puoi trovare un valore di α tale che esista finito e non nullo $\lim_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x-3x^\alpha}$?

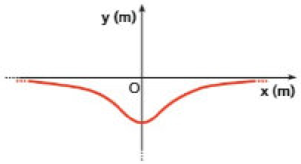
Quanto vale questo limite? $[\alpha=0;7]$

345 LEGGI IL GRAFICO Nel grafico è rappresentata la funzione $y=2^{\frac{ax+3b}{x+c}}$.
Determina il valore di a, b e c.

$[a=2;b=2;c=-4]$



346 REALTÀ E MODELLI **Qual è il profilo?** La sezione di uno scavo deve seguire l'andamento rappresentato in figura.



a. Quale delle funzioni $f(x)=\frac{k-x^2}{x^2+2}$ e $g(x)=\frac{k}{x^2+2}$ rappresenta meglio il grafico dello scavo? Motiva la risposta.

b. Per quale valore di k la profondità massima è di 2 metri? $[b)-4]$

3 Limiti notevoli

→ Teoria a p. 1499

Limiti di funzioni goniometriche

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Calcola i limiti.

AL VOLO

347 $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}$

348 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}$

349 $\lim_{x\to1}\frac{(1-\cos x)^2}{x^2}$

350 $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{(4x)^2}$

351 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ $[1]$

352 $\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x}{x}$ $[2]$

353 $\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{2x}$ $[0]$

354 $\lim_{x\to0}\frac{2\tan x+x}{x}$ $[3]$

355 $\lim_{x\to0}\frac{\tan x+3x}{x+\sin x}$ $[2]$

In 3 passi

1. Calcola il limite e verifica che è una forma indeterminata.
2. Trasforma $\tan x$ e raccogli x sia al numeratore sia al denominatore.
3. Semplifica x e usa i limiti notevoli per calcolare il limite.

356 $\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{2x+\sin x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

357 $\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{1-\cos x}$ $[4]$

358 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{2-\cos x}-1}$ $[2]$

359 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+5x}{x+2\sin x}$ $[2]$

360 $\lim_{x\to0}\frac{1+\cos(x+\pi)}{\tan x\sin x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

361 $\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{\tan^2x}$ $[2]$

362 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+2x\cos x}{x\cos x+2\sin x}$ $[1]$

363 $\lim_{x\to0}\frac{2\sin x+5x}{3\sin x-x}$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

364 $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}}{x}$ $[-\infty]$

365 $\lim_{x\to0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2x}$ $[0]$

366 $\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

367 $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x}$ $[0]$

368 $\lim_{x\to0^-}e^{\frac{\sin x}{1-\cos x}}$ $[0^+]$

369 $\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x}{\cos^2x-\cos x}$ $[-4]$

370 $\lim_{x\to0^+}[\ln(\tan x)-\ln(2x)]$ $\left[\ln\frac{1}{2}\right]$

371 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\tan x}{6x^3}$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

372 TEST Sapendo che $\lim_{x\to0^-}f(x)=0$, quanto vale il $\lim_{x\to0^-}\frac{x\cdot f(x)}{\sin x}$?

A $+\infty$ B 0 C 1 D $-\infty$

373 Trova $\lim_{x\to0}\frac{-1+\cos x}{3x^2+4x^3}$. $\left[-\frac{1}{6}\right]$

(USA *Rice University Mathematics Tournament*)

$\lim_{f(x)\to0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

Calcola i limiti.

374 $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}$ $[5]$

375 $\lim_{x\to0}\frac{\sin^22x}{x^2}$ $[4]$

376 $\lim_{x\to0}\frac{\sin6x}{7x}$ $\left[\frac{6}{7}\right]$

377 $\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\sin x}$ $[3]$

378 $\lim_{x\to2}\frac{1-\cos(2-x)}{2-x}$ $[0]$

379 $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{x}$ $[+\infty]$

380 $\lim_{x\to0}\frac{\sin^6x}{\sin x^6}$ $[1]$

381 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{\sin(x-2)}$ $[2]$

382 $\lim_{x\to0}\frac{\sin4x}{\sin7x}$ $\left[\frac{4}{7}\right]$

383 $\lim_{x\to0}\frac{\sin3x+2x}{5x+\sin3x}$ $\left[\frac{5}{8}\right]$

384 $\lim_{x\to0}\frac{\sin\frac{x}{6}+4x}{x}$ $\left[\frac{25}{6}\right]$

385 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x+4x}{\sin4x+x}$ $[1]$

386 $\lim_{x\to2}\frac{1-\sqrt{\cos(x-2)}}{x^2-4x+4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

387 TEST $\lim_{x\to 0^+} \tan\left[\frac{\sin(2\pi x)}{6x}\right] =$

A $\frac{1}{\sqrt{3}}$. B 1. C $\sqrt{3}$. D $\frac{\sqrt{2}}{2}$. E Il limite non esiste.

(USA *University of Houston Mathematics Contest*)

Cambiamo la variabile

388 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$.

Il limite presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Ci riconduciamo al limite notevole $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ con un cambiamento di variabile:

$y = x - \frac{\pi}{2}$, da cui $x = y + \frac{\pi}{2}$.

Per $x \to \frac{\pi}{2}$, $y \to 0$ e quindi il limite dato, utilizzando le formule degli archi associati, diventa:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-\sin y}{y} = -1.$$

Calcola i seguenti limiti mediante cambiamenti di variabile (in alcuni casi scritti a fianco).

389 $\lim_{x\to\pm\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)$ $[1]$

390 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}$ $[1]$

391 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x\right]$ $[-1]$

392 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin(\pi x)}$, $y = \pi(x-2)$. $\left[\frac{1}{\pi}\right]$

393 $\lim_{x\to -1}\frac{\sin(\pi x)}{x+1}$, $y=\pi(x+1)$. $[-\pi]$

394 $\lim_{x\to 3}\frac{\sin(x^2-3x)}{(x-3)(x-1)}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

395 $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{1-\cos(1-x)}}{2x^2-x-1}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{6}\right]$

396 $\lim_{x\to\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

397 $\lim_{x\to -4}\frac{\tan \pi x}{2x+8}$ $\left[\frac{\pi}{2}\right]$

398 $\lim_{x\to+\infty} 2x\sin\frac{1}{x+2}$ $[2]$

399 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)\cos x}{x(1-\sin x)}$ $\left[-\frac{8}{\pi}\right]$

400 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$ $[1]$

401 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x + \arctan 3x}{\sin x + 3x}$ $[1]$

402 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x+\arctan x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

Limiti di funzioni esponenziali e logaritmiche

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x} = k$

403 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5+x}{x}\right)^x$.

Per $x\to+\infty$ si ha la forma indeterminata 1^∞.

«Spezziamo» la frazione tra parentesi dividendo ciascun addendo del numeratore per x e semplificando:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5+x}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}+1\right)^x.$$

Poniamo $y = \frac{x}{5}$, cioè $x = 5y$. Per $x\to+\infty$ anche $y\to+\infty$. Il limite dato diventa:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{x}+1\right)^x = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1}{y}+1\right)^{5y} = \lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^5 = e^5.$$

Calcola i limiti.

404 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-7}{x}\right)^x$ $[e^{-7}]$

405 $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2}$ $[e^2]$

406 $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$ $[e]$

407 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ $[e]$

408 $\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$ $[e^6]$

409 $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^x$ $[e^{-2}]$

410 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+5)-\ln 5}{x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

411 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-4x)}{x}$ $[-4]$

412 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x$ $[\sqrt[4]{e}]$

413 $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{x+2}{x}\right)$ $[2]$

414 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+4x^2)^3-1}{x^2}$ $[12]$

In 3 passi

1. Verifica che è una forma indeterminata.
2. Poni $y = 4x^2$ ed effettua il cambio di variabile.
3. Applica il limite notevole $\lim_{y\to 0}\frac{(1+y)^k-1}{y} = k$.

415 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^6-1}{2x}$ $[3]$

416 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{1+3x}-1}{x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

417 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+x}-1}{x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

418 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{2x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

419 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)^2}{x}$ $[-2]$

420 $\lim_{x\to+\infty}\{x[\ln(x+1)-\ln x]\}$ $[1]$

421 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-2x}-1}{x}$ $[-2]$

422 $\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\sqrt{4x}}-1}{\sqrt{x}}$ $[2]$

423 $\lim_{x\to\pm\infty} x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$ $[-1]$

424 $\lim_{x\to-2}\frac{e^{2x+4}-1}{x+2}$ $[2]$

425 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-4x}-1}{x^2-x}$ $[4]$

426 $\lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\frac{3x+1}{3x}\right)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

427 $\lim_{x\to 4}\frac{\ln(x-3)}{x-4}$ $[1]$

428 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{2x}}{x^2-3x}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

429 $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{2x^2+1}\right)^x$ $[\sqrt{e}]$

430 $\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right]$

431 $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x^2+4)-2\ln x]$ $[0]$

432 $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{2x-2}$ $\left[\frac{e}{2}\right]$

433 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(1-\cos x)^{\tan x}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

434 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{8x}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

435 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-1}{5x}$ $[2]$

436 TEST $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x}$ vale:

A $\sqrt{e}$. B $\frac{3}{2}e$. C $\sqrt{e^3}$. D $\sqrt[3]{e^2}$.

!

I FONDAMENTALI

43

Usare i limiti notevoli

Calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^2)}{(e^{3x}-1)\sin 8x}$.

- **Proviamo a calcolare il limite in modo immediato.**

Calcoliamo il limite delle funzioni al numeratore e al denominatore.
La funzione al numeratore è continua e il denominatore è il prodotto di due funzioni continue. Inoltre:

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+4x^2)=0,\quad \lim_{x\to 0}(e^{3x}-1)\sin 8x=0.$$

Quindi, il limite è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Il primo passo nel calcolo di un limite è quello di osservare se le funzioni sono continue e sostituire a x il valore a cui tende.

- **Riconosciamo i limiti notevoli.**

Nel limite da calcolare ci sono: una funzione logaritmo naturale, una funzione esponenziale e una funzione seno, tutte in forma simile a quella dei limiti notevoli.
Per calcolare il limite generalizziamo i limiti notevoli:

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1 \to \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\ln[1+f(x)]}{f(x)}=1;$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1 \to \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1;$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1 \to \lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$

Quando trovi le funzioni goniometriche ed esponenziali e logaritmiche, prova a ricondurti alla forma dei limiti notevoli.

- Per $\ln(1+\mathbf{4x^2})$, la funzione $f(x)$ è $\mathbf{4x^2}$, quindi dividiamo numeratore e denominatore per $4x^2$.
- Per $e^{\mathbf{3x}}-1$, la funzione $f(x)$ è $\mathbf{3x}$, quindi dividiamo numeratore e denominatore per $3x$.
- Per $\sin \mathbf{8x}$, la funzione $f(x)$ è $\mathbf{8x}$, quindi dividiamo numeratore e denominatore per $8x$.

Si può sempre moltiplicare numeratore e denominatore per un'espressione diversa da 0.

Dunque:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x^2)}{(e^{3x}-1)\sin 8x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+4x^2)\cdot\frac{1}{e^{3x}-1}\cdot\frac{1}{\sin 8x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}}{\frac{1}{4x^2}}\cdot\frac{\frac{1}{3x}}{\frac{e^{3x}-1}{3x}}\cdot\frac{\frac{1}{8x}}{\frac{\sin 8x}{8x}}.$$

- **Usiamo i limiti notevoli per calcolare il limite.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{\frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2}}}^{\text{tende a 1}}}{\frac{1}{4\cancel{x^2}}}\cdot\frac{\frac{1}{3\cancel{x}}}{\underbrace{\boxed{\frac{e^{3x}-1}{3x}}}_{\text{tende a 1}}}\cdot\frac{\frac{1}{8\cancel{x}}}{\underbrace{\boxed{\frac{\sin 8x}{8x}}}_{\text{tende a 1}}}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}.$$

ESERCIZI

Calcola i limiti.

437 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}$ $[-2]$

438 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9\ln(1+2x)}{\sin 3x}$ $[6]$

439 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(e^{x-2}-1)(3x-6)}{\sin^2(x-2)}$ $[3]$

440 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\ln(1+x)-1}{2x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

441 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{e^{x^2}-1}$ $[1]$

442 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2+x^2}-e^2}{1-\cos^2 x}$ $[e^2]$

443 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{e^x-e}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

444 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{e^{\sin x}-\cos x}$ $[1]$

445 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 4x}-1}{\ln(1+\tan x)}$ $[4]$

446 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{\sin 2x+\sin x}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

447 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[6]{1-x}-1}{e^{2x}-1}$ $\left[-\frac{1}{12}\right]$

448 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

449 $\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{\cos x-1}$ $\left[-\frac{2}{7}\right]$

450 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^2(\sqrt[7]{1+3x}-1)}$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

451 YOU & MATHS Prove that the following limit exists and determine its value:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 2x-x}{5e^{2x}-5}$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

(UK *Manchester Metropolitan University, Centre for Mathematics Education*, Bank of Questions)

452 TEST $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax^2}-\cos 2x}{x^2}=8$. What is a?

A 3 B 6 C 4 D 2 E 1

(USA *University of Houston Math Contest*)

Riepilogo: Calcolo dei limiti

Calcola i limiti.

AL VOLO

453 $\lim\limits_{x\to +\infty}(-x^4+3x^3-5x^2+x)$

454 $\lim\limits_{x\to -\infty}(-5x^3+2x^2+5)$

455 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x}{1-x}$

456 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{1+2x}-\sqrt{3+2x})$ $[0]$

457 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^4-x^3+x^2}{-x^2+x^3-2x}$ $[-\infty]$

458 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-2x^3+x^2+1}{3x^2+4x^3-2x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

459 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+3x+4x^2}{x^4-2x^3}$ $[-\infty]$

460 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x^3+x^2-4x+3}{2x^2-x-1}$ $[+\infty]$

461 $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+8x+8}$ $[-\infty]$

462 $\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{x^2-x-12}{x^3+6x^2+9x}$ $[-\infty]$

463 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{3+x^2})$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

464 $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1+4x^2}-\sqrt{3+x^2})$ $[+\infty]$

465 $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{2x-\sqrt{x}}{x^2-x+3}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

ESERCIZI

466 $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+5}}$ $[-\infty]$

467 $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}}$ $[-\infty]$

468 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+7x^2}{x^4-2x^3+6}$ $[0]$

469 $\lim_{x\to-2} \frac{\sqrt[3]{x^3+8}}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ $[-\sqrt[3]{3}]$

470 $\lim_{x\to+\infty} [\log(x^2+2x)-\log(2x^2+3)]$ $\left[\log\frac{1}{2}\right]$

471 $\lim_{x\to+\infty} \{x[\log(2x-1)-\log(x+2)]\}$ $[+\infty]$

472 $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x^2+x-1}{4x^3-8x^2-5x-1}$ $[0]$

473 $\lim_{x\to1} \frac{x^3-2x+1}{x^3-1}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

474 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)}$ $\left[\frac{\sqrt{e^3}}{\ln(2\pi)}\right]$

475 $\lim_{x\to0^+} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+1}{x^2}$ $[-\infty]$

476 $\lim_{x\to1^+} e^{\frac{x+2}{x-1}}$ $[+\infty]$

477 $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}$ $[-2]$

478 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2}{e^{2x}-1}$ $[+\infty]$

479 $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}+2e^x}{e^{4x}-e^x}$ $[0]$

480 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{e^{3x}+e^{2x}-e^x}$ $[2]$

481 $\lim_{x\to-\infty} (x^4)^{e^{-3x}}$ $[+\infty]$

482 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^{\sqrt{5}}}{e^{-x}}$ $[+\infty]$

483 $\lim_{x\to0} \frac{2^{3x}-1}{2x}$ $\left[\frac{3}{2}\ln 2\right]$

484 $\lim_{x\to1^\pm} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ $[0;1]$

485 $\lim_{x\to0} \frac{e^x+e^{-x}-2}{3x^2}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

486 $\lim_{x\to2} \frac{\log_2 x}{2^{2x}-2^x-2}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

487 $\lim_{x\to+\infty} xe^x\ln x$ $[+\infty]$

488 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x\right]$ $[-1]$

489 $\lim_{x\to0} [(3+\cot x)\cdot\sin x]$ $[1]$

490 $\lim_{x\to0} \frac{\sin x-2x}{\sin x+x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

491 $\lim_{x\to0} \frac{\cos 2x-\cos x}{\cos x-1}$ $[3]$

492 $\lim_{x\to0^+} (\log\sin x-\log x)$ $[0]$

493 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+e^x+1}{x^2+x\sin x}$ $[1]$

494 $\lim_{x\to1} \frac{4\sin\ln x}{2^x\ln x}$ $[2]$

495 $\lim_{x\to4} \frac{\sin(x-4)}{x^2-16}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

496 $\lim_{x\to0} (1-8x)^{\frac{1}{2x}}$ $[e^{-4}]$

497 $\lim_{x\to0} \frac{x+\tan x}{2x+\sin x}$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

498 $\lim_{x\to-\infty} \left(1-\frac{9}{x}\right)^x$ $[e^{-9}]$

499 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^x$ $[e^{-3}]$

500 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x}$ $[e]$

501 $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+4}{x+2}\right)^x$ $[e^2]$

502 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+4}{2x+1}\right)^x$ $[0]$

503 $\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{3}-\sqrt{2})^x$ $[0^+]$

504 $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$ $[0;+\infty]$

505 $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ $[1]$

506 $\lim_{x\to2^+} \ln 3^{\frac{-x}{x-2}}$ $[-\infty]$

507 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+2)}$ $[1]$

508 $\lim_{x\to0} e^{\frac{-2x}{x^2}}$ $[\nexists, x\to0^+: 0^+, x\to0^-: +\infty]$

509 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x+\cos x}{\cos 2x}$ $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

510 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}$ $[-2\sqrt{2}]$

511 $\lim_{x\to0} \frac{\cos x-e^x}{\sin x}$ $[-1]$

512 $\lim_{x\to0} \frac{3\sin x}{\ln(1+x)^4}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

513 $\lim_{x\to0} \frac{2x^2\sin^2 x}{\ln(1+4x^4)}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

514 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-\ln\left(1+2x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$ $[0]$

515 $\lim_{x\to4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{(x-4)^2}}$ $[0]$

516 $\lim_{x\to0} \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

517 $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1+x^2}{x+x^2}\right)^{2x}$ $\left[\frac{1}{e^2}\right]$

518 $\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2}-2+\cos x}{\sin^2 x}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

519 $\lim_{x\to0} \frac{e^{5x}-\ln[e(x+1)]}{x}$ $[4]$

520 $\lim_{x\to0} \frac{\ln(x+1)^{e^x}}{x}$ $[1]$

521 $\lim_{x\to2} \frac{3e^2\sin(x-2)}{4e^x-(2e)^2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

522 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{\tan\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)}$ $[-2\sqrt{2}]$

523 $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos^2 2x}{x\sin x}$ $[4]$

524 $\lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-4}\right)^{\frac{x}{3}}$ $[\sqrt[6]{e^5}]$

525 $\lim_{x\to-1} (x+2)^{\frac{2}{x+1}}$ $[e^2]$

526 $\lim_{x\to0} (\cos x)^{-\frac{4}{x^2}}$ $[e^2]$

527 $\lim_{x\to0} \frac{\cos 6x-\cos 3x}{x^2}$ $\left[-\frac{27}{2}\right]$

528 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x+\ln^2 x}{4-\ln^2 x}$ $[-1]$

529 $\lim_{x\to0} (1-\sin x)^{\frac{\cos x}{x}}$ $[e^{-1}]$

530 $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{1-e^{\frac{x-1}{x}}}$ (con $x_0=0, 1, \pm\infty$)

$\left[\nexists, x\to0^+: 1, x\to0^-: 0;\ \nexists, x\to1^+: -\infty, x\to1^-: +\infty; \frac{1}{1-e}\right]$

531 $\lim_{x\to0} \frac{\left(2\sin\frac{x}{2}-\sin x\right)}{x^3}$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

532 $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{3x^3-2x^2+5}}{2x+\sqrt{x^2-1}}$ $[\sqrt[3]{3}]$

533 $\lim_{x\to0} (1+\tan^2 x)^{\frac{1}{x\ln(x+1)}}$ $[e]$

534 $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{\ln 4x}}$ $[e]$

535 $\lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)^{2x}}{(1+x^2)^x}$ $\left[\frac{1}{e^2}\right]$

536 $\lim_{x\to e} \frac{\ln x^2-2}{x-e}$ $\left[\frac{2}{e}\right]$

537 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\cos x\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}$ $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

538 $\lim_{x\to0} \frac{e^{-x}+\sin x-\cos x}{x}$ $[0]$

539 $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{x^3-x^4}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

540 $\lim_{x\to5} \log_{10} \frac{x-5}{\sqrt{x+20}-5}$ $[1]$

541 $\lim_{x\to0} \frac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{\tan x}$ $[1]$

542 $\lim_{x\to+\infty} 2^{-x}\left(2+\frac{3}{x}\right)^x$ $[\sqrt{e^3}]$

543 $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(2x+1)-\ln x-\ln 2]$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

544 $\lim_{x\to0} \frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ $[2]$

545 $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{18x^3-3x^2-4x+1}{2x^2+27x+13}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

546 $\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\cos x}{2x+\sin x}$ $[0]$

547 $\lim_{x\to0} \frac{x\sin x(e^x-1)}{\ln(1+x)(1-\cos x)}$ $[2]$

548 $\lim_{x\to0^+} e^{-\frac{1}{x}}(e+2x)^{\frac{1}{x}}$ $[e^{\frac{2}{e}}]$

549 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ [$\nexists$, $x\to 0^+: +\infty$, $x\to 0^-: 0^+$]

550 $\lim_{x\to 0}(x+2)^{-\frac{1}{x}}$ [$\nexists$, $x\to 0^-: +\infty$, $x\to 0^+: 0^+$]

551 $\lim_{x\to +\infty}(e^x - x^x)$ (SUGGERIMENTO Trasforma x^x con l'identità $a = e^{\ln a}$: $x^x = e^{\cdots}$, poi raccogli e^x.) [$-\infty$]

EUREKA!

552 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x-1)}{\ln(x+1)}$ [1]

553 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + 3e^x - 3 + x^3}{\ln(x+1)^2 + 2x - \cos x + 1}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

554 YOU & MATHS Find the following limits. You must show all your work.

a. $\lim_{x\to 4}\frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 3x - 4}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x}$

c. $\lim_{x\to +\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - 2x + 3}\right)$

d. $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}$

(USA *Southern Illinois University Carbondale*, Final Exam)

$\left[\text{a) }\frac{7}{5}\text{; b) }\frac{2}{3}\text{; c) }1\text{; d) }-\infty\right]$

555 Calcola per quale valore di a si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{5x} = -4.$$ [-20]

556 Trova per quale valore di k si ha

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{8x} = 3.$$ [24]

557 Calcola il valore di a per cui

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(3-x) - \ln 3}{ax} = -\frac{1}{6}$$ [2]

558 Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{2\sin 2x} & \text{se } x < 0 \\ \frac{5}{4} + x\ln(1+x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

calcola, se esiste, $\lim_{x\to 0} f(x)$. $\left[\frac{5}{4}\right]$

Discuti il risultato dei seguenti limiti al variare di k.

559 $\lim_{x\to +\infty}\frac{2x^k + x + 1}{x^2 - 1}$, $k \in \mathbb{N}$. [se $0 \leq k < 2$: 0; se $k = 2$: 2; se $k > 2$: $+\infty$]

560 $\lim_{x\to 3}\left(2^{\frac{k}{x-3}} + x\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

[se $k = 0$: 4; per $x\to 3^+$, se $k > 0$: $+\infty$, se $k < 0$: 3; per $x \to 3^-$, se $k > 0$: 3; se $k < 0$: $+\infty$]

561 $\lim_{x\to -\infty}\frac{2kx^2 - 1}{x+4}$, $k \in \mathbb{R}$. [se $k = 0$: 0; se $k > 0$: $-\infty$; se $k < 0$: $+\infty$]

562 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(k+x)}{x}$, $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

$\left[\text{se } k=0\text{: si ha solo } \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x} = -\infty\text{; se } k=1\text{: }1\text{; se } 0 < k < 1 \text{ e } x\to 0^{\pm}\text{: } \mp\infty\text{; se } k > 1 \text{ e } x \to 0^{\pm}\text{: } \pm\infty\right]$

563 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin[(k-1)x]}{(2k+3)x}$, $k \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. $\left[\text{se } k = 1\text{: }0\text{; se } k \neq 1\text{: }\frac{k-1}{2k+3}\right]$

564 Data la funzione $f(x) = \left(\frac{x^n + 2}{x+1}\right)^x$, calcola $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ nei seguenti casi:

a. $n = 0$; b. $n = 1$; c. $n = 2$. [a) 0; b) e; c) $+\infty$]

Problemi con i limiti

Problemi di matematica e realtà

REALTÀ E MODELLI

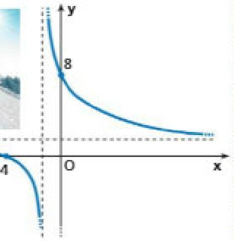
565 **L'alga si allarga** Una riserva sottomarina di 10 000 m² viene infestata da un'alga; al giorno t l'alga occupa approssimativamente un'area

$$A(t) = \frac{10000}{99\cdot\left(\frac{39}{99}\right)^t + 1}\ \text{m}^2.$$

Riuscirà l'alga a colonizzare l'intera riserva? Giustifica la tua risposta calcolando $\lim_{t\to +\infty} A(t)$. [sì]

566 **L'infinito di Giulia** Il grafico della figura ha equazione

$$y = \frac{ax^2 + 10x + b}{(x+1)^2}.$$



a. Determina a e b.

b. Per $x \geq 0$ il grafico approssima il profilo della pista da sci che Giulia sta percorrendo. Se le misure di x e y sono espresse in centinaia di metri, a che altezza si posizionerebbe Giulia se proseguisse all'infinito?

[a) $a = 2$, $b = 8$; b) 200 metri]

567 **Questione di concentrazione** Un farmaco somministrato per via intramuscolare prima viene iniettato nel muscolo e poi passa nel sangue. La sua concentrazione aumenta inizialmente fino a raggiungere il valore massimo, pari a 1 mg/L, poi decresce riducendosi progressivamente a zero. La legge che la descrive, in funzione del tempo misurato in ore, è del tipo

$$c(t) = 4(2^{-kt} - 2^{-2kt}),\quad \text{con } k \in \mathbb{R}^+.$$

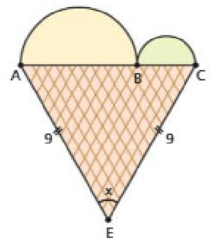
a. Verifica che tale legge descrive bene il modello: la concentrazione è inizialmente nulla, assume solo valori positivi per $t > 0$ e tende ad annullarsi al passare del tempo.

b. Determina il valore del parametro k in modo che la concentrazione massima si raggiunga dopo 5 ore.

$\left[\text{b) }\frac{1}{5}\right]$

Geometria piana

568 Determina il limite a cui tende la misura del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo rettangolo con i cateti di misura 4 e x, quando x tende a $+\infty$. [2]



569 Sapendo che $AB \cong 2BC$, trova le aree dei due semicerchi e del triangolo ACE in funzione di x. Calcola quindi il limite per x che tende a 0 del rapporto tra la somma delle aree dei due semicerchi e l'area di ACE. (SUGGERIMENTO Traccia l'altezza EH di ACE e calcola AH in funzione di x.)

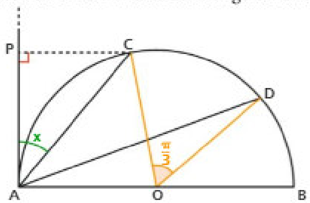
$\left[18\pi\sin^2\frac{x}{2}; \frac{9}{2}\pi\sin^2\frac{x}{2}, \frac{81}{2}\sin x; 0\right]$

570 Nel triangolo ABC si ha: $\overline{AB} = b$, $B\widehat{A}C = 3A\widehat{B}C$. Conduci una semiretta r avente origine in A, che incontri il lato BC in P e tale che risulti: $B\widehat{A}P \cong P\widehat{B}A$. Calcola il limite del rapporto $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$ quando l'angolo $P\widehat{B}A$ tende a 0 e quando tende a $\dfrac{\pi}{4}$. [2; 0]

In 4 passi

1. Disegna tutti gli elementi del problema e scegli come incognita x l'angolo $B\widehat{A}P$.
2. Ricava l'ampiezza di tutti gli angoli dei triangoli ABP e APC.
3. Applica il teorema dei seni al triangolo ABP per ricavare $\overline{AP}$ e poi al triangolo APC per ricavare $\overline{AC}$.
4. Scrivi il rapporto $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AC}}$ e calcola i limiti richiesti.

571 Nella semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ in figura, esprimi in funzione dell'angolo x il rapporto tra $\overline{AP} \cdot \overline{CD}$ e l'area del triangolo ACD.



Calcola quindi il limite di tale rapporto al tendere di C ad A. [4]

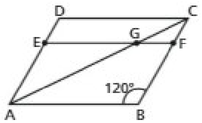
572 In un trapezio rettangolo $ABCD$ la base maggiore AB e il lato obliquo CB misurano $4a$ e la base minore DC misura $2a$. Traccia la semicirconferenza di diametro CB che incontra la base maggiore nel punto H. Considera un punto P appartenente all'arco CH e, posto $P\widehat{B}H = x$, calcola

$$\lim_{P \to H} \frac{\overline{PH}^2}{\overline{AP}^2 - \overline{PB}^2}.$$ [0]

573 In un quarto di circonferenza di estremi A, B e raggio $r = 1$, traccia la tangente t passante per B e la corda AB. Considera un punto M appartenente all'arco AB e, dette T e C le sue proiezioni ortogonali sulla tangente t e sulla corda AB, calcola il limite:

$$\lim_{M \to B} \frac{\overline{MT}}{\overline{MC}}.$$ [0]

574 Nel parallelogramma $ABCD$ in figura, $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 5$, $EF \parallel AB$. Calcola il limite del rapporto fra l'area del triangolo CFG e quella del trapezio $CDEG$ al tendere di F a C. [0]



575 Dato il settore circolare AOB di centro O, raggio 1 e angolo al centro $\dfrac{\pi}{4}$, considera un punto P sull'arco AB e la sua proiezione H su OA. Traccia la circonferenza con centro in H passante per P e sia Q il suo punto di intersezione con OA. Determina $\displaystyle\lim_{P \to B} \frac{\overline{OQ}}{\overline{BP}}$. [$\sqrt{2}$]

576 Considera la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, traccia la semiretta t tangente in A e la semiretta s di origine O che interseca la semicirconferenza in P e la semiretta t in Q. Calcola

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PQ} + \overline{AQ}}{\overline{PA}}.$$ [1]

577 È dato il settore circolare AOB di centro O, raggio r e angolo al centro $\dfrac{\pi}{4}$. Considera un punto Q sull'arco AB e sia QH la distanza di Q dalla tangente in A all'arco AB. Dal punto Q traccia la parallela a OB che incontra in R il raggio OA. Calcola:

$$\lim_{Q \to A} \frac{\overline{QH}}{\overline{QR}} \text{ e } \lim_{Q \to A} \frac{\overline{QH}}{\overline{QR}^2}.$$ $\left[0; \dfrac{1}{4r}\right]$

578 Data una circonferenza di raggio r e una sua corda AB a distanza $\dfrac{r}{2}$ dal centro O, indica con M il punto medio del maggiore dei due archi AB e con P un generico punto dell'arco minore. Il segmento MP interseca la corda AB in Q.

Calcola $\displaystyle\lim_{P \to A} \frac{\overline{PA}}{\overline{AQ}}$. [1]

Geometria analitica

579 La parabola γ_1 di equazione $y = x^2 - 4x$ e la parabola γ_2 di equazione $y = -x^2 + 6x$ si incontrano in due punti A e B $(x_A < x_B)$. La retta di equazione $x = k$, con $x_A \leq k \leq x_B$, interseca γ_1 in M e γ_2 in N. Determina il valore di:

$$\lim_{k \to x_A} \frac{\overline{MB}}{\overline{NB}}.$$ [1]

580 Determina in funzione di m la distanza tra il punto $A(3; -1)$ e la retta di equazione $y = mx + 2$, quindi calcola il suo limite per $m \to +\infty$ e interpreta graficamente il risultato. [3]

581 Data la parabola di equazione

$$y = 5ax^2 + 4ax - 1 - a,$$

determina le ascisse x_1 e x_2 dei punti in cui interseca l'asse x. Quindi calcola

$$\lim_{a \to +\infty} x_1, \quad \lim_{a \to +\infty} x_2, \quad \lim_{a \to +\infty} (x_1 - x_2)$$

e interpreta i risultati ottenuti. $\left[\dfrac{1}{5}; -1; \dfrac{6}{5}\right]$

582 Studia il fascio di parabole di equazione $y = -x^2 + kx$, verificando che ha come punto base l'origine O degli assi. Dopo aver scritto l'equazione della tangente in O alla generica parabola del fascio, considera il punto di intersezione C tra tale tangente e la retta $x = k$ e il punto H, proiezione di C sull'asse x.

Calcola $\displaystyle\lim_{k \to 0} \frac{\overline{OC} - \overline{OH}}{\overline{CH} \cdot \overline{OH}}$. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

583 Siano date l'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 4$ e la retta r di equazione $y = 2x - 4$ e siano A e B i loro punti di intersezione (A di ascissa minore). Sull'arco di iperbole AB considera un punto P e calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PK}}{\overline{PH}},$$

dove $\overline{PK}$ è la distanza di P dalla retta r e $\overline{PH}$ è la distanza di P dall'asse x. $\left[\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right]$

584 Sono date la circonferenza di equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e la parabola di equazione $x^2 - 3y = 0$.
Una retta di equazione $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$, interseca nel primo quadrante la circonferenza e la parabola, rispettivamente, nei punti P e Q.

Determina $\displaystyle\lim_{P \to O} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PO}}$, dove O è l'origine degli assi. $\left[\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1\right]$

585 In una circonferenza con centro nell'origine degli assi e raggio r indica con B il suo punto di intersezione con la parte positiva dell'asse y.
Considera il punto P sull'arco di circonferenza che si trova nel primo quadrante, la sua proiezione K sulla tangente alla circonferenza in B e calcola:

$$\lim_{P \to B} \frac{\overline{PK}}{\overline{BK}}.$$ [0]

586 Considera l'ellisse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ e la retta r di equazione $3x + 2y - 6 = 0$. Siano A e B i loro punti di intersezione (A di ascissa maggiore). Sull'arco di ellisse AB prendi un punto P e calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PK}}{\overline{PH}},$$

dove $\overline{PK}$ è la distanza di P dalla retta r e $\overline{PH}$ è la distanza dalla tangente all'ellisse in A. [$+\infty$]

587 Sono date le funzioni omografiche di equazioni:

$$y = \frac{1 - 2x}{x + 1}, \quad y = \frac{3x}{x + 1}.$$

Considera la retta $x = h$ $(h < -1)$ e i punti Q e R di intersezione con le iperboli. Calcola:

$$\lim_{h \to -\infty} \frac{\text{area}(AOQ)}{\text{area}(AOR)},$$

essendo $A(-2; 0)$ e O l'origine del sistema di assi cartesiani. $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

588 Nell'iperbole di equazione $y = \dfrac{x+1}{x+2}$, indica con C il centro e con A il punto di intersezione dell'asintoto verticale con l'asse x.
Sia P un generico punto appartenente al ramo che interseca entrambi gli assi coordinati, K la sua proiezione sull'asse x.
Dopo aver indicato con x l'ascissa del punto P, calcola il limite del rapporto tra l'area del triangolo OCP e quella del triangolo OPK quando $x \to +\infty$ e quando $x \to -2^+$. [1; 1]

589 Considera la parabola γ con l'asse coincidente con l'asse y, avente come vertice il punto $V(0; -4)$ e passante per $A(4; 0)$. Traccia la retta t tangente in A, considera un punto P sull'arco AV di γ e, indicata con Q la sua proiezione su t, calcola:

$$\lim_{P \to A} \frac{\overline{PQ}}{\overline{PA}}.$$ [0]

14

15

16

17

18

19